



ВЕСТНИК МАШИНОСТРОЕНИЯ

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ ЖУРНАЛ



8/2015



ВЕСТНИК машиностроения

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ ЖУРНАЛ

8
2015

ИЗДАЕТСЯ С НОЯБРЯ 1921 ГОДА

Журнал входит в перечень утвержденных ВАК РФ изданий для публикации трудов соискателей ученых степеней

Журнал переводится на английский язык, переиздается и распространяется во всем мире фирмой "Аллертон Пресс" (США)

ООО «Издательство «Инновационное машиностроение»

Адрес издательства:

107076, Москва, Колодезный пер., д. 2А, стр. 2

Телефон: 8-(499)-269-52-98

Факс: 8-(499)-269-48-97

Адрес редакции:

107076, Москва,

Колодезный пер., д. 2А, стр. 2

Телефон: 8-(495)-661-38-80.

E-mail: vestmash@mashin.ru

www.mashin.ru

Журнал зарегистрирован 19 апреля 2002 г. за № 77-12421 в Комитете Российской Федерации по печати

Учредитель: А.И. Савкин

Индексы: **70120** ("Роспечать"),
27841 ("Пресса России"),
60264 ("Почта России")

Цена свободная

Отпечатано в ООО "Канцлер",
150008, г. Ярославль, ул. Клубная, д. 4, кв. 49.

Оригинал-макет: ООО «Авансед солюшнз».

119071, г. Москва, Ленинский пр-т,

Сайт: www.aov.ru

Главный редактор **А.И. САВКИН**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Алешин Н.П., д-р техн. наук, акад. РАН, **Братухин А.Г.**, д-р техн. наук, **Воронцов А.Л.**, д-р техн. наук, **Гусейнов А.Г.**, д-р техн. наук, **Дмитриев А.М.**, д-р техн. наук, член-корр. РАН (председатель секции обработки материалов без снятия стружки), **Драгунов Ю.Г.**, д-р техн. наук, член-корр. РАН, **Древаль А.Е.**, д-р техн. наук (председатель секции технологии машиностроения), **Кутин А.А.**, д-р техн. наук, **Омельченко И.Н.**, д-р техн. и экон. наук (председатель секции организации и экономики производства), **Кузин В.В.**, д-р техн. наук, **Попов Д.Н.**, д-р техн. наук, **Попов А.В.**, д-р техн. наук, **Рыбин В.В.**, д-р техн. наук, член-корр. РАН, **Трегубов Г.П.**, д-р техн. наук, **Скугаревская Н.В.** (ответственный секретарь)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Московскому государственному технологическому университету
"СТАНКИН" 85 лет

85th Anniversary
of Moscow State Technical University "STANKIN"

Григорьев С. Н., Козочкин М. П. — Виброакустическое диагностирование электрофизических процессов как метод повышения качества обработки	3
Бушуев В. В., Молодцов В. В. — Методика моделирования механизмов приводов подачи станков с ЧПУ	8
Сабиров Ф. С., Шемякин С. С. — Оперативная оценка виброустойчивости станков и состояния шпиндельных подшипников	14
Гречишников В. А., Маслов А. Р., Пивкин П. М. — Инструментальная система для обработки торцевых канавок на станках с ЧПУ	16
Жигалов А. Н., Маслов А. Р., Шатуров Г. Ф. — Повышение эффективности фрезерования путем совершенствования структуры режущих твердых сплавов	20
Смуров И. Ю., Сова А. А., Окунькова А. А., Котобан Д. В., Подрабинник П. А. — Разработка микрофорсунок для ускорения частиц композитных порошковых материалов при холодном газодинамическом напылении	24
Тарасова Т. В., Назаров А. П., Пересторонина А. В. — Исследование процесса селективного лазерного плавления коррозионно-стойкой хромистой стали 20X13	27
Еленева Ю. Я., Андреев В. Н. — Организационный капитал предприятия, его формирование и анализ с позиций ресурсного подхода к управлению	31
Кропоткина Е. Ю., Флегентов В. К. — Упрочнение деталей из порошковых сплавов обкатыванием	35

Grigor'yev S. N., Kozochkin M. P. — Vibroacoustic diagnostic of electro-physical processes as method of improvement of processing quality	3
Bushuev V. V., Molodtsov V. V. — Methodic of modeling of feed drive system mechanisms of NC machines	8
Sabirov F. S., Shemyakin S. S. — Operative assessment of vibration resistance of machines and spindle bearings	14
Grechishnikov V. A., Maslov A. R., Pivkin P. M. — Tooling system for processing of end grooves on NC machines	16
Zhigalov A. N., Maslov A. R., Shaturov G. F. — Effectiveness increase of milling by improvement of structure of cutting hard alloys	20
Smurov I. Yu., Sova A. A., Okun'kova A. A., Kotoban D. V., Podrabinnik P. A. — Development of micronozzles for acceleration of composite powder materials' particles for cold gas-dynamic spraying	24
Tarasova T. V., Nazarov A. P., Perestoronina A. V. — Research of selective laser melting process of "20X13" corrosion resistant chromiumous steel	27
Eleneva Yu. Ya., Andreev V. N. — Enterprise organization capital, its formation and analysis from positions of resource-based view to management	31
Kropotkina E. Yu., Phlegentov V. K. — Strengthening of parts from powder alloys by rolling	35

КОНСТРУИРОВАНИЕ, РАСЧЕТ, ИСПЫТАНИЯ И НАДЕЖНОСТЬ МАШИН

DESIGN, CALCULATION, TESTS AND RELIABILITY OF MACHINES

Маленков М. И., Волков В. А., Гусева Н. К., Лазарев Е. А. — Повышение подвижности марсоходов путем совершенствования систем передвижения и алгоритмов их управления	37
Иванов А. С., Смирнов Н. И., Муркин С. В. — Повышение надежности резьбовых соединений погружных центробежных насосов	45
Кирсанов М. Н. — Расчет жесткости стержневой решетки	48
Кречетов А. А., Трухманов Д. С. — Наносети из углеродных нанотрубок для тензометрических датчиков систем структурного мониторинга состояния ответственных конструкций	52
Ивашов Е. Н., Князева М. П., Федотов К. Д., Яговтцев В. О. — Решение задачи оптимизации пьезопривода для нанотехнологии	55
Куренков А. С., Синева И. М., Гаврилов С. А., Щедрин А. В. — Проектирование инструмента со сферическими деформирующими элементами для охватывающей комбинированной обработки длинномерных заготовок	59
Бровман М. Я. — Анализ размерной точности заготовок при их изготовлении деформацией изгиба	61
Ямников А. С., Чуприков А. О. — Токарные патроны для закрепления тонкостенных заготовок	64

Malenkov M. I., Volkov V. A., Guseva N. K., Lazarev E. A. — Mobility analysis of mars rovers for the purpose of development of mobility systems and control algorithms of planet rovers of new generation	37
Ivanov A. S., Smirnov N. I., Murkin S. V. — Reliability improvement of threaded joints of sinking centrifugal pumps	45
Kirsanov M. N. — The calculation of the stiffness of the rod grille	48
Krechetov A. A., Trukhmanov D. S. — Nanonetworks from carbon nanotubes for strain gauges of structural state monitoring systems of critical structures	52
Ivashov E. N., Knyazeva M. P., Fedotov K. D., Yagovtsev V. O. — Solution of optimization problem of piezodrives for nanotechnology	55
Kurenkov A. S., Sinev I. M., Gavrilov S. A., Schedrin A. V. — Design of tool with spherical deforming elements for wraparound combined processing of long billets	59
Brovman M. Ya. — Analysis of dimensional accuracy of billets at their production by bending deformation	61
Yamnikov A. S., Chuprikov A. O. — Turning chucks for clamping-up of thin-walled workpieces	64

ТЕХНОЛОГИЯ МАШИНОСТРОЕНИЯ

MANUFACTURING ENGINEERING

Петрова П. Н., Аргунова А. Г., Исакова Т. А. — Разработка триботехнических материалов на основе политетрафторэтилена	67
Герасимов Д. Г. — Активный контроль при сборочных операциях	71
Рева В. П., Мансуров Ю. Н., Курявый В. Г., Петров В. В., Ким В. А. — Изготовление твердосплавных пластин повышенной стойкости для режущего инструмента	74
Домбровский Ю. М., Степанов М. С. — Новые возможности поверхностного легирования стали в порошковых средах	79
Захаров М. Н., Морозов Е. М., Насонов В. А. — Оценка опасности сварочных дефектов методом приведения к эквивалентной трещине	82

Petrova P. N., Argunova A. G., Isakova T. A. — Development of tribotechnical materials on the base of polytetrafluoroethylene	67
Gerasimov D. G. — Active control at assembly operations	71
Reva V. P., Mansurov Yu. N., Kuryaviy V. G., Petrov V. V., Kim V. A. — Production of hard-alloy plates of increased resistance for cutting tools	74
Dombrovskiy Yu. M., Stepanov M. S. — New facilities of surface alloyage of steels in powder environments	79
Zakharov M. N., Morozov E. M., Nasonov V. A. — Risk assessment of welding defects by the method of reduction to the equivalent crack	82

ТЕХНИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ

TECHNICAL INFORMATION

Ахмедов Х. И., Жумаев А. А. — Производственные испытания фрез	85
Сулаймонов Р. Ш., Мардонов Б. М., Лугачев А. Е. — Модель движения слоя зернистой среды при линтеровании	87

Akhmedov Kh. I., Zhumaev A. A. — Production tests of mills	85
Sulai'monov R. Sh., Mardonov B. M., Lugachev A. E. — Model of movement of seed rollers at lintering	87

Технический редактор Т. А. Шацкая
Корректор Т. В. Пчелкина

Сдано в набор 05.05.2015. Подписано в печать 14.06.2015.
Формат 60 × 88 1/8. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 10,78.

Перепечатка материалов из журнала "Вестник машиностроения" возможна при обязательном письменном согласовании с редакцией журнала; ссылка на журнал при перепечатке обязательна.

За содержание рекламных материалов ответственность несет рекламодатель.

Решение задачи оптимизации пьезопривода для нанотехнологии

Представлено техническое решение пьезопривода для нанотехнологии. Рассмотрены задачи оптимизации методами штрафной функции и Флетчера—Ривза. Оба метода описаны уравнениями и для удобства представлены в матричной форме.

Ключевые слова: оптимизация, метод штрафной функции, метод Флетчера—Ривза, пьезопривод, нанотехнологии.

The technical solution of a piezodrives for nanotechnology is presented. The problems of optimization by methods of penalty function and Fletcher—Reeves are considered. Both methods are described by equations and are presented in matrix form for convenience.

Keywords: optimization, penalty function method, Fletcher—Reeves method, piezodrives, nanotechnologies.

В нанотехнологии пьезоприводы обеспечивают высокую точность позиционирования, например зонда, что обуславливает высокое качество снимков поверхности подложки или модификации поверхности подложки для решения поставленных задач. Для оптимизации конструкции пьезопривода целесообразно использовать методы штрафной функции и Флетчера—Ривза.

Пьезопривод (рисунок) состоит из пьезотрубок 1—5 с электродами 6—10. Пьезотрубки связаны между собой соединительными элементами 11, 12. Элемент 11 связан с зондом 14, а элемент 12 с неподвижным основанием 13.

Пьезопривод работает следующим образом. При подаче напряжения на электрод 6 пьезотрубка 1 деформируется в результате обратного пьезоэффекта, зонд 14 перемещается вдоль оси Z. При подаче напряжения на электроды 7 и 8 деформируются пьезотрубки 2 и 3, зонд перемещается вдоль оси X. При подаче напряжения на электроды 9 и 10 деформируются пьезотрубки 4 и 5, зонд перемещается вдоль оси Y [1].

Метод штрафной функции основывается на преобразовании задачи минимизации функции $z = f(x)$ с соответствующими ограничениями на x в задачу поиска минимума без ограничений функции $Z = f(x) + P(x)$, где функция $P(x)$ — штрафная, т. е. при нарушении заданных ограничений функция $P(x)$ увеличивает значение функции Z . Тогда минимальное значение Z будет находиться внутри области ограничений. Функция $P(x)$, удовлетворяющая этому условию, может быть не единственной.

Задача минимизации формулируется как минимизация функции $z = f(x)$ при ограничениях $c_j(x) > 0, j = 1, 2, \dots, m$.

Функцию $P(x)$ удобно записать как

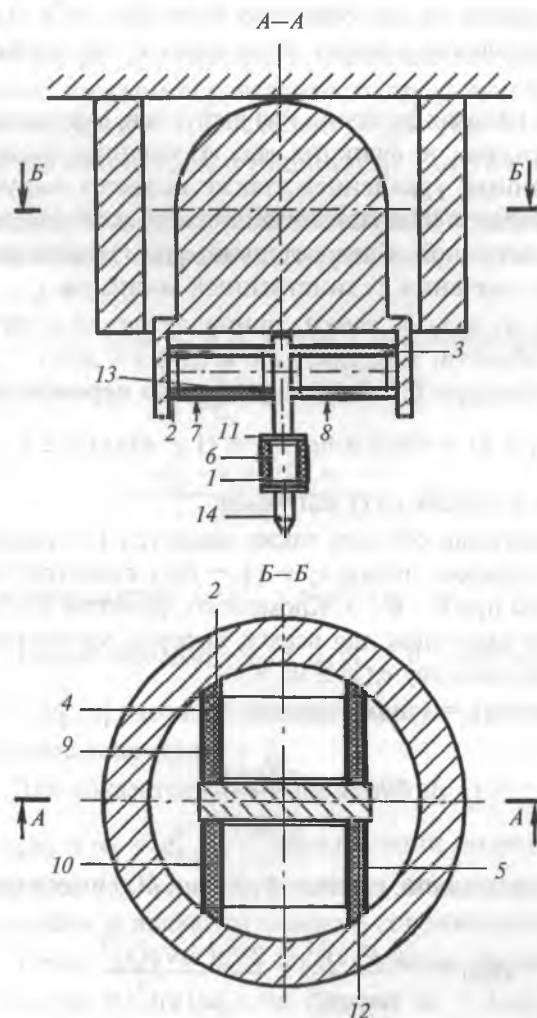
$$P(x) = r \sum_{j=1}^m \frac{1}{c_j(x)},$$

где r — положительная величина.

Функция $Z = \varphi(x, r)$ принимает вид:

$$Z = \varphi(x, r) = f(x) + r \sum_{j=1}^m \frac{1}{c_j(x)}.$$

Тогда, если x принимает допустимые значения, для которых $c_j(x) \geq 0$, то Z принимает значения, ко-



Пьезопривод

торые больше соответствующих значений $f(x)$ (истинной целевой функции задачи), разность $P(x)$ и Z можно уменьшить, так как r может быть очень малой величиной. Но если x принимает значения, которые хотя и являются допустимыми, но близки к границе области ограничений и, по крайней мере, одна из функций $c_j(x)$ близка к нулю, тогда значения функции $P(x)$ и, следовательно, значения Z станут очень большими. Таким образом, влияние функции $P(x)$ заключается в создании "гребня с крутыми краями" вдоль каждой границы области ограничений. Следовательно, если поиск минимума функции $\varphi(x, r)$ начинается из допустимой точки и осуществляется поиск без ограничений, то минимум, конечно, будет находиться в допустимой области для задачи с ограничениями. Полагая r достаточно малой величиной, для того чтобы влияние $P(x)$ было малым в точке минимума, сделаем точку минимума функции $\varphi(x, r)$ без ограничений совпадающей с точкой минимума функции $f(x)$ с ограничениями.

В общем случае невозможно аналитически определить положение минимума функции $\varphi(x, r)$, рассматривая ее как обычную функцию от r . Для его определения следует обратиться к численным методам.

Если целевая функция $f(x)$ выпуклая, а функция $c_j(x)$ вогнутая, то функция $\varphi(x, r)$, заданная вышеприведенным уравнением, также является выпуклой функцией в области ограничений, которая является выпуклой. Следовательно, $\varphi(x, r)$ имеет для данного значения r единственный минимум.

Если x_1 и x_2 — точки, принадлежащие допустимой области, т. е. $c_j(x_1) \geq 0$ и $c_j(x_2) \geq 0$ для $j = 1, 2, \dots, m$, то при $0 < \theta < 1$ справедливо неравенство

$$c_j(\theta x_2 + (1 - \theta)x_1) \geq \theta c_j(x_2) + (1 - \theta)c_j(x_1) \geq 0,$$

так как функция $c_j(x)$ выпуклая.

Допустимая область также является выпуклой. Таким образом, точка $\theta x_2 + (1 - \theta)x_1$ является допустимой при $0 < \theta < 1$. Кроме того, функция $1/c_j(x)$ является выпуклой для всех x , которые удовлетворяют неравенству $c_j(x) \geq 0$.

Если $h(x) = 1/c_j(x)$, имеем:

$$\nabla h(x) = \frac{-\nabla c_j(x)}{[c_j(x)]^2}.$$

Следовательно, гессиан функции $h(x)$ имеет вид:

$$H(x) = -\frac{C(x)}{[c_j(x)]^2} + \frac{2\nabla c(x)\nabla c(x)^T}{[c_j(x)]^3},$$

где $C(x)_{ik} = \partial^2 c_j(x) / \partial x_i \partial x_k$ есть гессиан функции $c_j(x)$.

Тогда, если p — произвольный вектор, справедливо равенство

$$p^T H(x) p = -\frac{p^T C(x) p}{[c_j(x)]^2} + \frac{2[p^T \nabla c_j(x)]^2}{[c_j(x)]^3},$$

где всегда $p^T H(x) p > 0$, так как $C(x)$ — матрица с отрицательным определителем, так как $c_j(x)$ — выпуклая функция и $c_j(x) \geq 0$. Тогда матрица $H(x)$ положительно определена и функция $1/c_j(x)$ — выпуклая по всей области.

Предположим, что $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ — минимальные точки функции $\varphi(x, r)$ для убывающей последовательности значений $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$, стремящейся к нулю. Тогда последовательность точек $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, \dots$ сводится к оптимальному решению задачи с ограничениями при $r_k \rightarrow 0$, следовательно,

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} [\min \varphi(x, r_k)] = f(x^*),$$

где x^* — минимальная точка функции $f(x)$ при наличии ограничений.

Таким образом, при $k \rightarrow \infty$ ($r_k \rightarrow 0$) имеем:

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} \varphi(x_k^*, r_k) = f(x^*);$$

$$f(x_k^*) \rightarrow f(x^*);$$

$$r_k \sum_{j=1}^m \frac{1}{c_j(x_k^*)} \rightarrow 0.$$

Очевидно, что если функция $f(x)$ выпуклая, а функция $c_j(x)$ при $j = 1, \dots, n$ вогнутая, то функция $\varphi(x, r)$ при наличии ограничений имеет единственный минимум.

Выбор начального значения r может оказаться важным с позиций сокращения числа итераций при минимизации функции $\varphi(x, r)$. Если сначала выбрано очень малым, чтобы функция $\varphi(x, r)$ мало отличалась от функции $f(x)$, то метод будет сходиться очень быстро. Однако такой выбор может привести к серьезным сложностям при вычислениях. Для малых значений r функция $\varphi(x, r)$ будет быстро меняться в окрестности минимума, что может вызвать затруднения при использовании градиентного метода. Слишком большое значение r может привести к тому, что штрафная функция $P(x)$ в уравнении станет доминирующей. Поэтому правильный выбор начальной точки очень важен [2].

Для многих задач таким значением для начальной точки является $r_0 = 0$. Более рациональный

подход заключается в том, чтобы понять, что если начальная точка x лежит вблизи минимума функции

$$\varphi(x, r) = f(x) + r \sum_{j=1}^m \frac{1}{c_j(x)} = f(x) + rP(x),$$

то градиент функции $\varphi(x, r)$ мал:

$$\nabla\varphi(x, r) = \nabla f(x) + r\nabla P(x).$$

Квадрат нормы данного вектора

$$\nabla f(x)^T \nabla f(x) + 2r \nabla f(x)^T \nabla P(x) + r^2 \nabla P(x)^T \nabla P(x),$$

минимум будет достигнут при

$$r = \frac{-\nabla f(x)^T \nabla P(x)}{\nabla P(x)^T \nabla P(x)}.$$

Метод Флетчера—Ривса основан на том, что для квадратичной функции n переменных n одномерных поисков по взаимно сопряженным направлениям позволяют найти минимум.

Функция $f(x)$, зависящая от N -мерного вектора переменных x , называется сепарабельной, если она представляется в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной из N переменных:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i).$$

Записав для удобства $f_i^{(k)} = f_i(x_i^{(k)})$, выражение для аппроксимирующей функции можно представить как

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K_1} \lambda_1^{(k)} f_1^{(k)} + \sum_{k=1}^{K_2} \lambda_2^{(k)} f_2^{(k)} + \dots + \sum_{k=1}^{K_N} \lambda_N^{(k)} f_N^{(k)},$$

где $x_i = \sum_{k=1}^{K_i} \lambda_i^{(k)} x_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, N$.

Причем при всех $i = 1, \dots, N$ справедливо выражение

$$\sum_{k=1}^{K_i} \lambda_i^{(k)} = 1, \lambda_i^{(k)} \geq 0$$

при $k = 1, \dots, K_i$, $\lambda_i^{(j)} \lambda_i^{(k)} = 0$; $i > j + 1$;

$$i = 1, 2, \dots, K_i - 1.$$

Рассмотрим функцию, описанную выражением

$$f(x) = a + b^T x + \frac{1}{2} x^T G x.$$

Одномерный поиск будем вести по направлениям, взаимно сопряженным относительно матрицы G . В качестве первого направления поиска из первой точки x_1 выберем направление наискорейшего спуска $d_1 = -g_1$ и найдем значение λ_1 , минимизирующее функцию $f(x_1 + \lambda d_1)$.

Положим, что $x_2 = x_1 + \lambda_1 d_1$, выполним поиск в направлении d_2 , сопряженном с направлением d_1 (выберем вектор d_2 как линейную комбинацию векторов d_1 и $-g_2$) и найдем $x_3 = x_2 + \lambda_2 d_2$ минимизацией функции $f(x_2 + \lambda d_2)$. Направление поиска d_3 из точки x_3 выбирается сопряженным с направлениями d_1 и d_2 . На $(k + 1)$ -м шаге выбираем d_{k+1} в виде линейной комбинации $-g_{k+1}, d_1, d_2, \dots, d_k$, сопряженной со всеми направлениями d_1, d_2, \dots, d_k .

Таким образом,

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \sum_{r=1}^k \alpha_r d_r, \quad k = 1, 2, \dots$$

Оказывается, что все α_r равны нулю, за исключением α_k , следовательно, $d_{k+1} = -g_{k+1} + \alpha_k d_k$ и $\alpha_k = g_{k+1}^2 / g_k^2$.

Прежде чем перейти к индуктивным рассуждениям, докажем справедливость предыдущих отношений при $k = 1$. Поскольку $f(x_2) = f(x_1 + \lambda_1 d_1)$ является минимумом функции $f(x_1 + \lambda d_1)$ на прямой, то $g_2^T d_1 = -g_2^T g_1 = 0$. Данный результат также справедлив для квадратичных функций $g_2 = b + Gx_2$ и $g_1 = b + Gx_1$.

Тогда, если d_1 и $d_2 = -g_2 + \alpha_1 d_1$ сопряжены, то $d_2^T G d_1 = 0$, т. е. $-g_2^T G d_1 + \alpha_1 d_1^T G d_1$, следовательно,

$$\frac{(-g_2^T - \alpha_1 g_1^T) G (x_2 - x_1)}{\lambda_1} = 0,$$

откуда получим: $(-g_2^T - \alpha_1 g_1^T)(g_2 - g_1) = 0$.

Таким образом, $-g_2^2 + \alpha_1 g_1^2 = 0$, следовательно, $\alpha_1 = g_2^2 / g_1^2$, что и требовалось доказать, а это и есть соотношение при $k = 1$.

Для доказательства выражений $d_{k+1} = -g_{k+1} + \alpha_k d_k$ и $\alpha_k = g_{k+1}^2 / g_k^2$ по индукции полагаем, что векторы d_1, d_2, \dots, d_k получены описанным выше способом и являются взаимно сопряженными.

Точка $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$ является минимумом функции $f(x_k + \lambda d_k)$ на прямой $x_k + \lambda d_k$, тогда $g_{k+1}^T d_k = 0$.

Имеем: $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k = x_{k-1} + \lambda_{k-1} d_{k-1} + \lambda_k d_k$ и т. д.

Таким образом,

$$x_{k+1} = x_{j+1} + \sum_{i=j+1}^k \lambda_i d_i \text{ при } 1 \leq j \leq k-1,$$

следовательно,

$$Gx_{k+1} = Gx_{j+1} + \sum_{i=j+1}^k \lambda_i Gd_i,$$

тогда

$$g_{k+1}^\top = g_{j+1}^\top + \sum_{i=j+1}^k \lambda_i d_i^\top G \text{ при } 1 \leq j \leq k-1,$$

откуда

$$g_{k+1}^\top d_j = g_{j+1}^\top d_j + \sum_{i=j+1}^k \lambda_i d_i^\top G d_i. \quad (1)$$

В результате преобразований получим $g_{j+1}^\top d_j = 0$, а ввиду взаимной сопряженности получим: $d_i^\top G d_j = 0$ при $j < i$. Таким образом, каждое слагаемое в правой части выражения (1) равно нулю.

Следовательно, $g_{k+1}^\top d_j = 0$ при $j = 1, 2, \dots, k-1$ и ввиду того, что $g_{k+1}^\top d_k = 0$, окончательно получим: $g_{k+1}^\top d_j = 0$ при $j = 1, 2, \dots, k$.

Таким образом, вектор g_{k+1} ортогонален векторам d_1, d_2, \dots, d_k и векторам g_1, g_2, \dots, g_k .

Так как в начале доказательства по индукции было предположено, что $d_j = -g_j + \alpha_{j-1} d_{j-1}$, то выражение (1) принимает вид:

$$-g_{k+1}^\top g_j + \alpha_{j-1} g_{k+1}^\top d_{j-1} = 0,$$

следовательно, $-g_{k+1}^\top g_j = 0$, так как $g_{k+1}^\top d_{j-1} = 0$.

Таким образом, $g_{k+1}^\top g_j = 0$ при $j = 1, 2, \dots, k$.

Необходимо также показать, что вектор d_{k+1} , определенный ранее, сопряжен с векторами d_1, d_2, \dots, d_k . Для $j = 1, 2, \dots, k-1$ в силу взаимной сопряженности имеем: $d_{k+1}^\top G d_j = -g_{k+1}^\top G d_j + \alpha_k d_k^\top G d_j = -g_{k+1}^\top G d_j$. Тогда

$$\begin{aligned} -g_{k+1}^\top G d_j &= -g_{k+1}^\top G \frac{(x_{j+1} - x_j)}{\lambda_j} = \\ &= -g_{k+1}^\top \frac{(g_{j+1} - g_j)}{\lambda_j} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем: $d_{k+1}^\top G d_k = 0$ при $j = 1, 2, \dots, k-1$, что справедливо для любого α_k так, чтобы выполнялось равенство $d_{k+1}^\top G d_k = 0$, а именно:

$$\begin{aligned} d_{k+1}^\top G d_k &= -g_{k+1}^\top G d_k + \alpha_k d_k^\top G d_k = \\ &= -g_{k+1}^\top \frac{(g_{k+1} - g_k)}{\lambda_k} + \\ &+ \alpha_k (-g_k^\top + \alpha_{k-1} d_{k-1}^\top) \frac{(g_{k+1} - g_k)}{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем:

$$d_{k+1}^\top G d_k = \frac{-g_{k+1}^2 + \alpha_k g_k^2}{\lambda_k},$$

так как $g_{k+1}^\top d_j = 0$ и $g_{k+1}^\top g_j = 0$ при $j = 1, 2, \dots, k$.

Направление d_{k+1} будет сопряжено с направлением d_k , если $\alpha_k = g_{k+1}^2 / g_k^2$, что и требовалось доказать.

Таким образом, направления поиска в методе Флетчера—Ривза являются взаимно сопряженными и в данном методе минимум квадратичной функции n переменных можно найти не более, чем за n шагов. Это значит, что одномерный поиск проводится с требуемой точностью и устраняются любые ошибки округления, которые могут возникнуть. Вышеописанный метод применим и к неквадратичным функциям, так как, если поиск осуществляется вблизи минимума, то можно надеяться на достижение квадратичной сходимости, когда имеет место квадратичная аппроксимация. Флетчер и Ривс полагают, что в этом случае каждое n -е направление поиска должно быть направлением наискорейшего спуска и при построении сопряженных направлений необходимо обнулить поиск и начать новый [2, 3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Пат. 140185 на полезную модель Рос. Федерации: МПК H01L41/00. Пьезосканер.
2. Васильев Ф. П. О градиентных методах решения задач оптимального управления системами, описываемыми параболическими уравнениями // Оптимальное управление. М.: Знание, 1972. С. 118—143.
3. Ивашов Е. Н., Федотов К. Д. Подсистема автоматизированного проектирования элементов пьезоэлектрических устройств // Вестник машиностроения. 2014. № 6. С. 30—36.