

Том 54, Номер 5

ISSN 0044-4669

Май 2014



# ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

<http://www.naukaran.ru>  
<http://www.maik.ru>



“НАУКА”

Российская академия наук

**ЖУРНАЛ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Том 54

Май

№ 5

2014

*Выходит 12 раз в год*

*Основан в январе 1961 г.*

*академиком Анатолием Алексеевичем Дородницыным*

ISSN: 0044-4669

*Журнал издается под руководством  
Отделения математических наук РАН*

Главный редактор Ю.С. ОСИПОВ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

А.А. Абрамов, О.М. Белоцерковский, А.Н. Боголюбов,  
В.Ф. Бутузов, Ф.П. Васильев, С.К. Годунов, Ю.Г. Евтушенко, Ю.И. Журавлёв,  
А.М. Ильин, М.К. Керимов (*зам. главного редактора*),  
А.В. Кряжковский, А.Г. Куликовский, В.Л. Матросов, С.И. Похожаев,  
Е.Е. Тыртышников, Б.Н. Четверушкин, Г.И. Шишкин

*Зав. редакцией Л.В. Раевская*

*Адрес редакции: 119333 Москва,  
ул. Вавилова, 40, редакция “Журнала вычислительной математики  
и математической физики”, тел. 8-499-135-55-08  
e-mail: comp\_mat@ccas.ru, compmath@mail.ru*

Москва  
Издательство “Наука”

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 54, номер 5, 2014 год

---

---

Численное решение матричных уравнений типа Стейна в самосопряженном случае <i>Ю. О. Воронцов, Х. Д. Икрамов</i>	723
Восстановление траектории движения автономного аппарата по пятилучевому сканированию <i>С. Н. Васильев, Я. В. Малыгин, А. В. Мироненко</i>	728
Исследование задачи оптимального управления процессом кристаллизации вещества в новой постановке <i>А. Ф. Албу, В. И. Зубов</i>	734
Оценка погрешности классических методов Рунге–Кутты <i>С. И. Хашин</i>	746
Однократно неявные диагонально расширенные методы Рунге–Кутты четвертого порядка <i>Л. М. Скворцов</i>	755
Динамика логистического уравнения с запаздыванием и с большим коэффициентом пространственно распределенного управления <i>И. С. Кащенко, С. А. Кащенко</i>	766
Контрпримеры в обратных задачах для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений <i>А. Б. Костин</i>	779
Асимптотика собственных значений задачи Дирихле на скошенном $\mathcal{T}$ -образном волноводе <i>С. А. Назаров</i>	793
О единственности высокоточной бикомпактной схемы для квазилинейных уравнений гиперболического типа <i>М. Д. Брагин, Б. В. Рогов</i>	815
Сеточно-характеристический метод на неструктурированных тетраэдральных сетках <i>М. В. Муратов, И. Б. Петров, А. В. Санников, А. В. Фаворская</i>	821
Finite element solution of double-diffusive boundary layer flow of viscoelastic nanofluids over a stretching sheet <i>M. Goyal, R. Bhargava</i>	833
О разрешимости интегро-дифференциального уравнения, возникающего в задаче о нелокальном взаимодействии волн <i>Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян</i>	834
Стационарные решения уравнений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости <i>Н. В. Бамбаева, А. М. Блохин</i>	845
Трехмерное моделирование наката нелинейных поверхностных гравитационных волн на береговые склоны <i>И. Б. Аббасов</i>	871
Памяти Ивана Ивановича Ерёмкина (22.01.1933–21.07.2013) <i>Ю. Г. Евтушенко, М. Ю. Хачай</i>	887
Памяти Леонарда Амаяковича Оганесяна (1925–2013) <i>В. Б. Андреев, Г. П. Астраханцев, В. П. Дымников, Л. А. Руховец, Б. Н. Четверушкин</i>	892

---

---

УДК 519.626

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ АВТОНОМНОГО АППАРАТА ПО ПЯТИЛУЧЕВОМУ СКАНИРОВАНИЮ<sup>1)</sup>

© 2014 г. С. Н. Васильев, Я. В. Малыгин, А. В. Мироненко

(620219 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, Ин-т матем. и механ. УрО РАН)

e-mail: svasil@imm.uran.ru; malygin@imm.uran.ru; a\_mironenko@mail.ru

Поступила в редакцию 12.11.2012 г.

Переработанный вариант 26.06.2013 г.

Рассматривается задача восстановления траектории движения летательного аппарата. Восстановление проводится по замерам поля высот, сделанным аппаратом во время движения, и заранее известной информации о поле высот в целом. Приводится описание алгоритма и экспериментальные результаты моделирования его работы. Библ. 8. Фиг. 2. Табл. 1.

**Ключевые слова:** алгоритм восстановления траектории движения автономного аппарата, метод пятилучевого сканирования, методы оптимизации.

DOI: 10.7868/S0044466914050081

### ВВЕДЕНИЕ

Одной из ключевых задач при навигации является определение местоположения движущегося объекта в пространстве в данный момент времени. Эта задача обычно решается с помощью системы глобального позиционирования (GPS) и/или дополнительных внешних систем импульсно-фазовой навигации, которые обеспечивают максимально точное определение местоположения. Однако эти методы зависят от наличия и функционирования внешних устройств, а также от устойчивого приема их сигналов. При навигации глубоко под водой или в космосе данные системы GPS недоступны, а установка маяков импульсно-фазовой навигации не всегда возможна. Кроме того, точность навигации с использованием внешних устройств существенно падает при наличии помех, которые могут быть вызваны как естественными (например, вспышки на солнце и атмосферные условия), так и искусственными причинами.

Существуют автономные инерциальные системы определения положения на основе данных об ускорении центра масс и угловых ускорениях (акселерометры, гироскопы и т.п.). Однако любые приборы имеют некоторую погрешность, и ошибка определения положения будет накапливаться в процессе полета. В связи с этим естественно рассмотреть задачу автономной навигации с использованием данных бортовых систем, измеряющих внешнее геофизическое поле и априорных данных об этом поле. Более подробные теоретические исследования данного вопроса можно найти в [1]–[3].

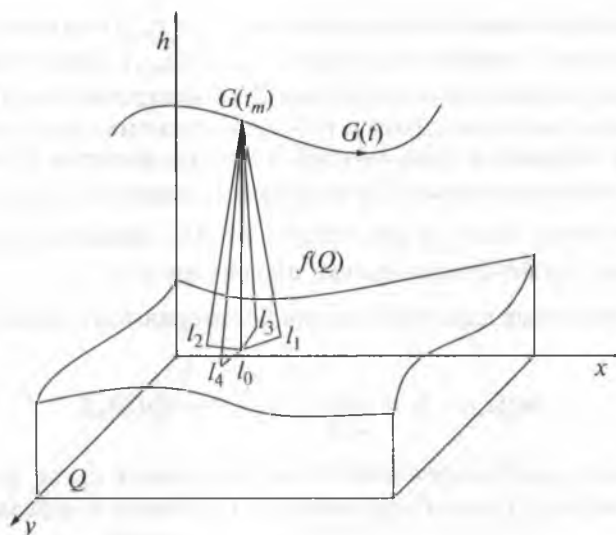
Цель данной работы – построение алгоритма восстановления местоположения, скорости и ориентации летательного аппарата (ЛА) по данным о расстоянии до поверхности земли и моделирование работы этого алгоритма на реальных рельефах.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется поле высот  $f$  (рельеф), заданное на области  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ . Летательный аппарат движется по некоторой гладкой траектории  $G = \{G(t) : t_0 \leq t \leq t_n\} \subset \Omega \times \mathbf{R}^+$  над земной поверхностью. В некоторые моменты времени происходит сканирование поля вблизи аппарата.

Аналогичная задача для ситуации, когда ЛА движется на известной постоянной высоте рассматривалась в [4]. Задача восстановления траектории по одному центральному лучу при извест-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” (проект 09-П-1-1013), при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1022) и РФФИ (код проекта 11-01-00445).



Фиг. 1. Направления сканирования.

ной абсолютной высоте ЛА рассматривалась в [5], [6]. Это предположение применимо, если есть приборы, позволяющие точно определять абсолютную высоту. Например, с помощью анализа давления можно получать информацию о высоте аппарата в воде или в воздухе. Однако в общем случае приборы, измеряющие давление, дают большую погрешность, а в космосе недоступны вовсе. В данной работе мы отказываемся от условия известной заранее абсолютной высоты. Отметим, что появление дополнительной степени свободы существенно усложняет задачу. В частности, методы предварительного расчета для ускорения и распараллеливания вычислений, применявшиеся в [5], потребовали бы слишком много оперативной памяти.

Ясно, что для успешного определения абсолютной высоты ЛА сканер должен иметь более одного луча. Будем считать, что сканер имеет несколько лучей, измеряющих расстояние от аппарата до рельефа. Малое количество лучей может давать недостаточно информации о рельефе, а большое количество лучей трудно реализовать аппаратно. Кроме того, большее количество лучей потребует больше вычислительных ресурсов для обработки информации в реальном времени. Авторы выбрали конфигурацию из 5 лучей.

Предполагается также, что, в силу естественных физических ограничений, возможность резкого изменения направления или величины скорости движения ЛА ограничена. Наша задача восстановления (задача восстановления траектории) заключается в том, чтобы по последовательности измерений с учетом ограничений на движение ЛА по возможности определить реальное местоположение, скорость и ориентацию аппарата в пространстве в моменты сканирования.

Пусть сканирование происходит в моменты времени  $t_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . В нашей модели фрагмент поля  $\varphi(G, t_m) = \{l_j(G, t_m), j = 0, \dots, 4\}$  — это расстояния от ЛА до земной поверхности по пяти направлениям  $l_j$ . Направления сканирования выбраны так: центральный луч ( $l_0$ ) направлен вертикально вниз. Остальные лучи отклонены от центрального на некоторый угол  $\beta$ . Их проекции на область  $\Omega$  определяются проекцией траектории  $G$  на эту область в момент  $t_m$ : проекция луча  $l_1$  направлена вперед вдоль проекции вектора скорости траектории  $G$ ,  $l_2$  — назад,  $l_3$  — влево и  $l_4$  — вправо перпендикулярно вектору скорости (см. фиг. 1). Расстояние по центральному лучу  $l_0$  является высотой аппарата над рельефом в данный момент времени. Отметим, что в данной модели сканируемый фрагмент поля зависит не только от текущего местоположения ЛА, но и от направления его движения.

Под решением задачи восстановления будем понимать непрерывную кусочно-линейную кривую (ломаную)  $\Gamma$ , задаваемую последовательностью точек “излома”  $\Gamma(t_m) \in \Omega \times \mathbf{R}^+$ , такую, что соответствующие фрагменты поля  $\varphi(\Gamma, t_m)$  наиболее близки к измеренным значениям  $\varphi(G, t_m)$ , и ломаная удовлетворяет заданным ограничениям на траекторию.

Разность между соседними моментами измерений  $(t_m - t_{m-1})$  считаем постоянной и равной 1. Пусть в процессе построения  $\Gamma$  определены точки  $\Gamma(t_m)$  и  $\Gamma(t_{m-1})$ . Будем считать, что в момент времени  $t_m$  (при  $m > 0$ ) вектор направления движения ЛА сонаправлен вектору  $(\Gamma(t_m) - \Gamma(t_{m-1}))$ , т.е. в нашей модели ориентация самого аппарата и его сканирующих лучей определяется его предполагаемым положением в текущий и предыдущий моменты времени. Для определенности предположим, что вектор направления движения ЛА в момент  $t_0$  такой же, как и в момент  $t_1$ . Для точек  $a, b, c \in \Omega \times \mathbf{R}^+$  обозначим через  $l_j(a, b - c)$  расстояние от ЛА, находящегося в точке  $a$ , до рельефа вдоль луча  $l_j$  при условии, что ЛА ориентирован по вектору  $b - c$ .

Будем считать, что наклонные дальности вдоль  $l_j$  измеряются с некоторой погрешностью  $\varepsilon$ .

Пусть

$$w_m(a, a - b) = \max_{j=0..4} |l_j(a, a - b) - l_j(G, t_m)|$$

есть локальная погрешность восстановления в момент времени  $t_m$ , т.е. разность между фрагментом, который был бы измерен в точке  $a$  при движении из точки  $b$ , и реальными замерах поля в момент  $t_m$ .

Будем считать, что ломаная  $\Gamma$  удовлетворяет упомянутым ограничениям на траекторию, если верно следующее:

1) евклидово расстояние между последовательными положениями ЛА  $\rho(\Gamma(t_m), \Gamma(t_{m-1})) \in [V_{\min}, V_{\max}]$ , т.е. скорость ЛА лежит в заданном диапазоне;

2) угол между проекциями направлений соседних звеньев ломаной на горизонтальную плоскость ограничен числом  $\alpha_{\max}$ , т.е. ЛА не может резко изменять азимут движения;

3) модуль разности углов с вертикалью соседних звеньев ломаной ограничен числом  $\gamma_{\max}$ , т.е. тангаж ЛА также не может резко меняться при движении.

Будем также требовать, чтобы ломаная  $\Gamma$  удовлетворяла условию на локальную погрешность восстановления  $w_m(\Gamma(t_m), \Gamma(t_m) - \Gamma(t_{m-1})) \leq \varepsilon$  при  $m > 0$  и  $w_0(\Gamma(t_0), \Gamma(t_1) - \Gamma(t_0)) \leq \varepsilon$ .

Множество ломаных, удовлетворяющих перечисленным условиям, обозначим через  $\mathcal{G}$ . В качестве меры уклонения восстановленной траектории  $\Gamma$  от измеренных данных будем использовать сумму всех уклонений

$$W(\Gamma) = \sum_{m=1}^n w_m(\Gamma(t_m), \Gamma(t_m) - \Gamma(t_{m-1})) + w_0(\Gamma(t_0), \Gamma(t_1) - \Gamma(t_0)).$$

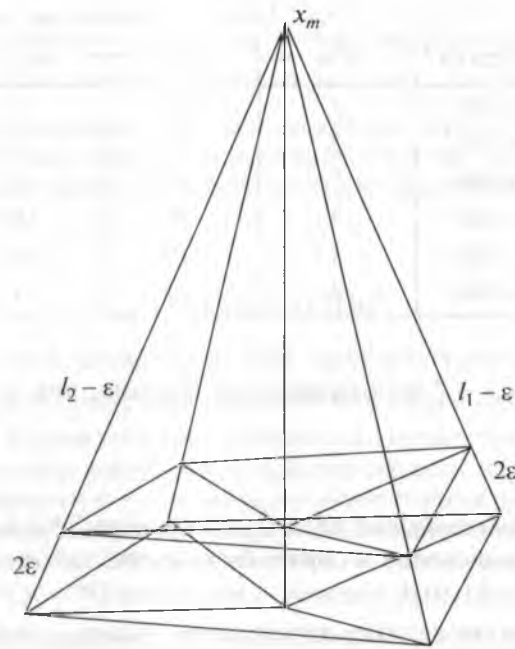
Решением задачи восстановления является ломаная  $\Gamma^*$ :

$$\Gamma^* \subset \underset{\Gamma \in \mathcal{G}}{\operatorname{argmin}} W(\Gamma). \quad (1)$$

Заметим, что решение может быть не единственным, например в случае  $f \equiv 0$ , т.е. когда траектория ЛА проходит над горизонтальной поверхностью.

Для упрощения решение задачи будем искать в виде ломаной с узлами на достаточно густой дискретной трехмерной сетке  $Q$  из  $\Omega \times \mathbf{R}^+$ . Проекция  $Q$  на  $\Omega$  является прямоугольной регулярной сеткой с некоторым заранее выбранным шагом. Возможные значения высот, соответствующих одному узлу сетки на  $\Omega$ , выбираются исходя из полученного замера центрального (вертикального) сканирующего луча. Считаем, что центр тяжести ЛА находится на вертикальном отрезке  $[l_0(G, t_m) - \varepsilon, l_0(G, t_m) + \varepsilon]$  над рельефом. Для получения дискретной сетки по высоте этот диапазон разобьем на  $v$  уровней с шагом  $2\varepsilon/v$ .

Пусть  $x_m \in Q$  — одно из возможных положений центра тяжести ЛА в момент времени  $t_m$ , т.е. существует ломаная  $\Gamma \in \mathcal{G}$  такая, что  $x_m = \Gamma(t_m)$ . Для эффективного определения возможности некоторого узла сетки  $Q$  быть местоположением ЛА на траектории  $\Gamma \in \mathcal{G}$  введем понятие совместности. Точка  $x_m$  совместна с точкой  $x_{m-1}$ ,  $m > 0$ , если  $V_{\min} \leq \rho(x_{m-1}, x_m) \leq V_{\max}$  и  $w_m(x_m, x_m - x_{m-1}) \leq \varepsilon$ . Это означает, что эти точки расположены друг относительно друга так, что ЛА имеет возможность переместиться из  $x_{m-1}$  в  $x_m$  за данный интервал времени, и что при нахождении



Фиг. 2. Диапазон допустимых фрагментов рельефа для заданного набора сканирующих лучей  $\{l_j\}$  и погрешности измерения  $\epsilon$ .

аппарата в точке  $x_m$  и его ориентации, задаваемой предыдущей точкой, расстояние до рельефа по каждому сканирующему лучу  $l_j$  равно соответствующему измеренному значению  $l_j(G, t_m)$  с точностью не хуже  $\epsilon$  (см. фиг. 2).

Тройка точек  $(x_{m-1}, x_m, x_{m+1})$  называется *совместной*, если совместны пары  $(x_{m-1}, x_m)$  и  $(x_m, x_{m+1})$ , а также разность направлений между этими парами по азимуту и тангажу не превосходит предельных значений  $\alpha_{\max}$  и  $\gamma_{\max}$ .

## 2. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Предлагается следующий алгоритм нахождения траектории  $\Gamma(t)$ .

1. Запоминаем наклонные дальности  $\{l_{0,j} = l_j(G, t_0)\}$ , измеренные в момент времени  $t_0$ .
2. После измерения наклонных дальностей  $\{l_{1,j}\}$  в момент времени  $t_1$  определяем на трехмерной сетке  $Q$  всевозможные пары взаимно совместных точек  $x_0$  и  $x_1$ , т.е. такие, что  $w_1(x_1, x_1 - x_0) \leq \epsilon$  и  $w_0(x_0, x_1 - x_0) \leq \epsilon$ , а также  $V_{\min} \leq \rho(x_0, x_1) \leq V_{\max}$ . Полагаем  $m = 1$ .
3. Для выбранной пары  $x_1$  и  $x_0$  вычисляем накопленный вес  $p_{j,i}^1 = p_1(x_{1,j}, x_{0,i}) = w_1(x_{1,i}, x_{1,i} - x_{0,i}) + w_0(x_{0,i}, x_{1,i} - x_{0,i})$  и помещаем его в список известных весов. Список исключенных весов пока пуст.
4. Определяем  $\min_{k,j,i} p_k(x_{k,j}, x_{k-1,i})$  из списка всех известных весов  $p$ , не принадлежащих списку исключенных. Запоминаем этот минимум, а также значения индексов  $(i^*, j^*, k^*)$ , на которых он достигается. Найденный вес  $p_{j^*,i^*}^{k^*}$  объявляем текущим, и добавляем его в список исключенных.
5. Если для текущего веса  $p_{j^*,i^*}^{k^*}$  имеем  $k^* = m$ , то увеличиваем  $m$  на 1. Если  $m > n$ , то поиск окончен (переходим к п. 8), иначе после наступления момента  $t_m$  в наш поиск включаем следующие измерения  $\{l_{m,j}\}$ .
6. Для совместной пары точек  $(x_{k^*,j^*}, x_{k^*-1,i^*})$ , соответствующей текущему весу  $p_{j^*,i^*}^{k^*}$ , строим всевозможные совместные тройки  $(x_{k^*+1,l}, x_{k^*,j^*}, x_{k^*-1,i^*})$  и для каждой из них определяем  $w(x_{k^*+1,l}, x_{k^*+1,l} - x_{k^*,j^*})$ , а также пересчитываем  $p_{k^*+1,l}(x_{k^*+1,l}, x_{k^*,j^*})$ , если соответствующий накопленный вес



Таблица

Регион	Размер сетки	$\epsilon$ , м	$n$	$\delta_{\max}$	$\delta$	$\delta_n$
Великобритания	2000 × 450	5	38	9	2.1	1
Великобритания	2000 × 450	2	39	5	1.2	0
Челябинская область	2000 × 400	5	37	5	0.9	0
Челябинская область	2000 × 400	2	38	3	0.7	0
Кавказ	2000 × 500	5	40	14	3.4	2
Кавказ	2000 × 500	2	38	11	2.7	1

еще не определен, или при  $k \geq 2$  он оказывается больше, чем  $p_{k^*}(x_{k^*,j^*}, x_{k^*-1,i^*}) + w_{k^*+1}(x_{k^*+1,l} - x_{k^*,j^*})$ .

7. Переходим к п. 4.

8. После того, как определен текущий вес  $p_{j^*,i^*}^{k^*}$  с индексом  $k^* = n$ , остается восстановить траекторию. Восстановление происходит в обратном порядке, начиная с  $n$ -го элемента: в списке  $p_n(x_{n,j}, x_{n-1,i})$  выбираем минимальный элемент с индексом  $\{k^* = n, i^*, j^*\}$  (если минимальных несколько – то один из них), по его индексу определяем точки  $x_{k^*,j^*}$  и  $x_{k^*-1,i^*}$ , а затем последовательно  $x_{m-1,i^*} : i^* = \operatorname{argmin}_i p_m(x_{m,j^*}, x_{m-1,i})$ . На каждом последующем шаге в качестве индекса  $j^*$  используем  $i^*$ , найденный на предыдущем.

Как видно, данный алгоритм является модификацией алгоритма Дейкстры поиска пути минимального суммарного веса во взвешенном графе (см. [7]). Узлами графа являются совместные пары узлов из  $Q$ , а ребрами – совместные тройки точек.

Построенная таким образом последовательность  $\{x_{m,i^*}\}$  будет являться решением задачи восстановления на сетке  $Q$ . При достаточной частоте сетки и информативном рельефе это будет хорошее приближение к решению задачи (1).

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для проверки работы алгоритма моделировался пролет аппарата над реальным рельефом, взятым из открытых источников в сети Интернет (см. [8]).

В качестве поля высот были использованы данные нескольких географических областей, с различными диапазонами перепадов высот: юго-восточная часть Великобритании, Челябинская область и западная часть Кавказских гор. Поле высот было задано на сетке с шагом 90 м. Для построения ломаной в качестве  $Q$  использовалась более густая сетка с шагом 30 м. Для определения пересечения луча с рельефом, заданным дискретным полем высот на равномерной сетке, используется билинейная интерполяция.

Модельная траектория строилась в виде ломаной с разной длиной звеньев и переменной скоростью, но удовлетворяющей физическим ограничениям на траекторию  $\mathcal{G}$ . Замеры наклонных дальностей  $l_{jm}$  производились с использованием интерполяции через равные промежутки времени. К каждому значению добавлялась случайная погрешность, ограниченная величиной  $\epsilon$ . Полученная последовательность измерений вместе с исходным рельефом подавались на вход алгоритма. Результаты представлены в таблице.

Здесь  $\delta_n$  – ошибка навигации после сканирования в последний момент времени  $t_n$ ,  $\delta_{\max} = \max_{m=0..n} \delta_m$  – максимальная ошибка навигации. Под ошибкой навигации мы понимаем отклонение вычисленного положения ЛА от эталонного в момент  $t_m$ . Среднеквадратичная ошибка навигации

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n \delta_m^2}.$$



Все расчетные примеры выполнялись при  $V_{\min} = 30$ ,  $V_{\max} = 60$ ,  $\alpha_{\max} = 5^\circ$ ,  $\beta = 5^\circ$ ,  $\gamma_{\max} = 3^\circ$ . Единица измерения величин  $\delta_n$ ,  $\delta_{\max}$ ,  $\delta$ ,  $V_{\min}$  и  $V_{\max}$  — шаг густой сетки, т.е. 30 метров. Как видно из таблицы, алгоритм дает неплохие результаты на рельефах с умеренным перепадом высот.

На высокогорном рельефе ошибка навигации может увеличиваться (см. две последние строки в таблице). Однако, благодаря учету всей накопленной информации, в дальнейшем, при достижении ЛА более информативной местности точность восстановления траектории снова повышается (до 1, 2 узлов сетки).

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По сравнению с алгоритмом, описанным в [6], здесь построение графа поиска осуществлялось не полностью, а лишь для узлов, с текущим минимальным накопленным весом  $p_{ij}^m$  и их непосредственных “соседей”. Кроме того, первоначальное множество совместных пар точек  $\{x_0, x_1\}$  было дополнительно ограничено введением начальной области маршрута и начального направления движения. Все это позволило уменьшить вычислительные затраты и расход оперативной памяти. Освободившиеся ресурсы были использованы для увеличения количества сканирующих лучей и использования для поиска более густой сетки, что позволило увеличить качество восстановления.

Также в данном алгоритме, в сравнении с предыдущим, не используется абсолютная высота объекта (над уровнем моря), что делает алгоритм более независимым от посторонних источников данных, а значит, более универсальным.

Тем не менее, сохраняется следующая особенность алгоритма: на восстановленной траектории есть участки, точно совпадающие с реальной траекторией, а на некоторых участках расхождение между траекториями довольно значительно. Такое поведение восстановленной траектории зависит от локальной информативности рельефа.

Отметим, что в алгоритм можно легко добавить использование дополнительной, пусть даже неточной, информации о направлении движения или о местонахождении ЛА, т.е. той информации, что позволит добавить ограничения на условие совместности точек и тем самым уменьшить размер графа поиска. Также алгоритм можно легко адаптировать под произвольное количество и конфигурацию сканирующих лучей.

Авторы выражают благодарность В.Б. Костоусову за плодотворную дискуссию.

Постановка задачи принадлежит В.И. Бердышеву.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоглазов И.Н., Джанджагава Г.И., Чигин Г.П. Основы навигации по геофизическим полям. М.: Наука, 1985.
2. Красильщиков М.Н., Серебрякова Г.Г. Управление и наведение беспилотных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий. М.: Физматлит, 2003.
3. Бердышев В.И., Костоусов В.Б. Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Научное издание. Екатеринбург: УрО РАН, 2007.
4. Бердышев В.И., Малыгин Я.В. Поиск траектории летательного аппарата по полю высот. Поиск траектории движения летательного аппарата по полю высот // Параллельные вычисл. технологии (ПаВТ'2009). Тр. междунар. науч. конф. (Нижний Новгород, 30 марта–3 апреля 2009 г.). Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009. С. 389–392.
5. Васильев С.Н., Малыгин Я.В., Мироненко А.В. Поиск траектории движения летательного аппарата // Вестн. Южно-уральского гос. ун-та. 2009. Вып. 4. № 37(170). С. 34–39.
6. Васильев С.Н., Малыгин Я.В., Мироненко А.В. Восстановление траектории движения летательного аппарата. Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2011. Вып. 1. С. 25–31.
7. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979.
8. <http://srtm.csi.cgiar.org/SELECTION/inputCoord.asp>