

Синергетика

**ОТ ПРОШЛОГО
К БУДУЩЕМУ**



№ 102

Серия основана
в 2002 г.

Председатель редколлегии
профессор

Г. Г. Малинецкий

С. А. Кащенко

1541498

**ДИНАМИКА МОДЕЛЕЙ
на основе
ЛОГИСТИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**



URSS

С. А. Кащенко

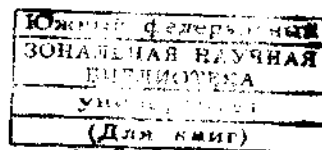
**ДИНАМИКА МОДЕЛЕЙ
НА ОСНОВЕ
ЛОГИСТИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**



URSS

МОСКВА

ББК 22.161.6 22.161.7 22.311 22.318



*Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект № 20-11-00005), не подлежит продаже*

Кашенко Сергей Александрович

**Динамика моделей на основе логистического уравнения с запаздыванием. — М.:
КРАСАНД, 2020. — 576 с. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 102.)**

Книга посвящена исследованиям логистического уравнения с запаздыванием. Основное внимание уделено аналитическим методам анализа. Разработанные в этой монографии методы и приемы исследований допускают их распространение и на другие классы уравнений с запаздыванием.

Автором исследовано достаточно большое количество уравнений (и систем уравнений) с запаздыванием. Изучены модернизированные и обобщенные, с медленно и с быстро меняющимися во времени коэффициентами, с нелинейностями более общего вида, с несколькими сосредоточенными запаздываниями, с распределенным запаздыванием, нелинейно либо неавтономно зависящими коэффициентами.

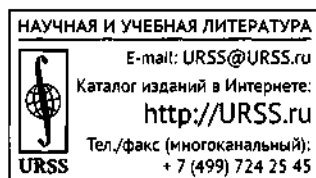
Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Дополнительное соглашение № 075-02-2020-1514/1 к Соглашению о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2020-1514)

Издательство «КРАСАНД». 117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.
Формат 70×100/16. Тираж 300 экз. Уч.-изд. л. 42. Подписано в печать 29.10.2020. Зак. № 991.
Отпечатано в АО «Областная типография «Печатный двор».
432049, Ульяновск, ул. Пушкарева, д. 27.

ISBN 978-5-396-01026-0

© КРАСАНД, 2020

27061 ID 266784



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Содержание

От редакции	11
Удивительный мир систем с запаздыванием (Г. Г. Малинецкий)	13
От автора	19
Предисловие	21
Список литературы	36
Глава 1. Локальная и глобальная устойчивость. Бифуркационный анализ	37
Введение	37
1.1. Оценка области глобальной устойчивости состояния равновесия логистического уравнения с запаздыванием	41
1.1.1. Основная конструкция	42
1.1.2. Случай $m = 0$	46
1.1.3. Случай $m = 1$	48
1.1.4. Случай $m = 2$	53
1.2. Бифуркация Андронова—Хопфа	60
1.2.1. Бифуркация Андронова—Хопфа в логистическом уравнении с запаздыванием	61
1.2.2. Бифуркация Андронова—Хопфа в логистическом уравнении с запаздыванием и с малым возмущением	62
1.3. Бифуркация в окрестности состояния равновесия в случае, когда малые возмущения содержат большое запаздывание	63
1.3.1. Построение нормальной формы в окрестности состояния равновесия	64
1.3.2. О локальной динамике уравнения (1.52) в случае сверхбольших значений h	65
1.3.3. Малые возмущения в окрестности цикла	69
1.3.4. Пример. Комплексное логистическое уравнение с запаздыванием	72

1.4. Параметрический резонанс при двухчастотном возмущении в логистическом уравнении с запаздыванием	74
1.4.1. Алгоритмическая часть	76
1.4.2. Результаты численного исследования	79
Список литературы	84
Глава 2. Динамика в случае медленно осциллирующих и быстро осциллирующих коэффициентов	87
2.1. Динамика логистического уравнения с запаздыванием и медленно меняющимися коэффициентами	87
2.1.1. Построение почти периодического решения, близкого к $a^{-1}(\tau)$ и исследование его устойчивости	89
2.1.2. Исследование устойчивости решения $u_0(\tau, \varepsilon)$ в критическом случае	90
2.1.3. Бифуркация Андронова—Хопфа	93
2.1.4. Алгоритм построения регулярных почти периодических решений при условии $r(\tau)T(\tau) \equiv \text{const}$	95
2.1.5. Асимптотика релаксационных решений в случае больших значений мальтузианского коэффициента	98
2.1.6. Асимптотика решений уравнения (2.1) при условии, когда достаточно большим является коэффициент запаздывания	101
2.2. Применение принципа усреднения к исследованию динамики логистического уравнения с запаздыванием	104
2.2.1. Усреднение при постоянном запаздывании	106
2.2.2. Линейный анализ	106
2.2.3. Нелинейный анализ. Бифуркация Андронова—Хопфа	108
2.2.4. Усреднение в случае переменного запаздывания	110
Список литературы	120
Глава 3. Релаксационные колебания в логистическом уравнении с запаздыванием	123
Введение	123
3.1. Асимптотика периодического решения обобщенного логистического уравнения с запаздыванием	124
3.1.1. Постановка задачи и основные результаты	124
3.1.2. Доказательство существования периодического решения	128
3.1.3. Доказательство теорем 3.2–3.4	132
3.1.4. Завершение обоснования теоремы 3.1	136
3.1.5. Случай, когда большим параметром является коэффициент запаздывания	142

3.1.6. Об асимптотическом разложении периодического логистического уравнения с запаздыванием . . .	143
3.1.7. О некоторых выводах биологического характера	145
3.2. Логистическое уравнение с запаздыванием и с малой миграцией	147
3.2.1. Быстро осциллирующие решения уравнения с малой миграцией	148
3.2.2. Особенности логистического уравнения с двумя запаздываниями и с малой миграцией	149
3.3. Управление периодом релаксационных колебаний с помощью малых воздействий	151
3.4. Оптимизация процесса охоты	153
Список литературы	158
Глава 4. Локальный и нелокальный анализ динамики уравнения с двумя запаздываниями	161
Введение	161
4.1. Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона	162
4.1.1. Локальный анализ	163
4.1.2. Исследование характеристического квазимногочлена	163
4.1.3. Построение нормальной формы	168
4.1.4. Численный анализ исследуемой системы	172
4.2. Динамика логистического уравнения, содержащего запаздывание	181
4.2.1. Бифуркация Андронова—Хопфа	183
4.2.2. Построение квазинормальных форм при больших значениях параметра λ	186
4.2.3. Медленно осциллирующие решения	186
4.2.4. О решении краевой задачи (4.64), (4.65)	188
4.2.5. Быстро осциллирующие решения	192
4.2.6. Более сложная конструкция	193
4.2.7. Асимптотика релаксационного цикла при больших λ	194
4.3. Динамика логистического уравнения с двумя запаздываниями	199
4.3.1. Асимптотика релаксационного цикла	200
4.3.2. Асимптотика релаксационного цикла при малых значениях параметра σ	203
4.3.3. Асимптотика медленно осциллирующих структур в малой окрестности состояния равновесия уравнения (4.88) . . .	205
4.3.4. Асимптотика быстро осциллирующих структур в малой окрестности состояния равновесия уравнения (4.88) . . .	210

4.4. О локальной динамике нелинейных дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями . . .	212
Список литературы	214
Глава 5. Уравнения и системы логистических уравнений с запаздыванием и запаздывающим управлением . .	217
Введение	217
5.1. Динамика логистического уравнения с запаздыванием и запаздывающим управлением	218
5.1.1. Уравнение с малым коэффициентом запаздывающего управления	218
5.1.2. Сосуществование близких циклов	222
5.1.3. Локальный анализ уравнения (5.1) при малых γ	225
5.1.4. Уравнение с большим коэффициентом запаздывающего управления	226
5.1.5. Управление динамикой (5.1) с помощью малых значений h	227
5.1.6. Основная конструкция	227
5.1.7. Бифуркационное значение параметра запаздывания T	229
5.1.8. Критический случай. Построение квазинормальных форм	230
5.1.9. Динамика при малом мальтузианском коэффициенте и большом запаздывании в управляющем воздействии	232
5.1.10. Выводы	232
5.2. Корпоративная динамика систем логистических уравнений с запаздыванием и с большим запаздывающим управлением	233
5.2.1. Динамика системы из двух связанных логистических уравнений с запаздыванием	234
5.2.2. Более общая конструкция	239
5.2.3. Численное исследование	241
5.2.4. О корпоративной динамике системы из трех логистических уравнений с запаздыванием	247
5.2.5. Выводы	250
Список литературы	251
Глава 6. Модифицированные логистические уравнения с запаздыванием	255
Введение	255
6.1. Периодические решения нелинейных уравнений, обобщающих логистическое уравнение с запаздыванием	255

6.1.1. Основные результаты для логистического уравнения с запаздыванием	257
6.1.2. Периодические решения уравнения (6.10)	259
6.1.3. Применение результатов раздела 6.1.2 к уравнению (6.6)	265
6.1.4. Релаксационные циклы при условии $\lambda \gg 1$	267
6.2. Релаксационные колебания в логистическом уравнении с запаздыванием и модифицированными нелинейностями	271
6.2.1. Бифуркация Андронова—Хопфа в уравнениях с одним запаздыванием	273
6.2.2. Ступенчатые решения логистического уравнения с запаздываниями и ограничением нелинейной функции	276
6.2.3. Ступенчатые решения уравнения с двумя запаздываниями	281
6.2.4. Асимптотика периодического решения уравнения (6.43)	287
6.2.5. Асимптотика периодического решения уравнений (6.46) и (6.47)	289
Список литературы	294
Глава 7. Логистическое уравнение с запаздыванием, зависящим от искомой функции	297
7.1. Локальная динамика обобщенного логистического уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции	297
7.1.1. Линейный анализ	299
7.1.2. Основные результаты	302
7.1.3. Транскритическая и вилообразная бифуркации	303
7.1.4. Бифуркация Андронова—Хопфа	304
7.1.5. Примеры	309
7.2. Бифуркационные явления в логистическом уравнении с запаздываниями, зависящими от искомой функции	311
7.2.1. Линейный анализ	313
7.2.2. Бифуркации медленно осциллирующих решений	316
7.2.3. Бифуркации быстро осциллирующих решений	318
7.2.4. Бифуркации в случае $\alpha \approx 1$	320
7.3. Релаксационные колебания в уравнении с непостоянным запаздыванием	325
7.3.1. Основные утверждения	326
7.3.2. Доказательство существования периодического решения	328
7.3.3. Свойства периодического решения	337
7.3.4. Свойства решения при конкретизации запаздывания	339
Список литературы	342

Глава 8. Динамические свойства в модели популяции насекомых	347
Введение	347
8.1. Математическая модель эксперимента Николсона	348
8.1.1. Локальный анализ модели	351
8.1.2. Анализ нелинейного уравнения	356
8.1.3. Некоторые свойства двух уравнений	360
8.1.4. Теоретическое объяснение экспериментального результата Николсона	362
8.1.5. Численный анализ одного уравнения	363
8.1.6. Численный анализ двух уравнений	367
8.2. Динамика логистического уравнения с двумя запаздываниями, моделирующего изменение численностей популяции	368
8.2.1. Линейный анализ	372
8.2.2. Нелинейный анализ	375
8.2.3. Случай $a_0 = 0$	377
8.2.4. Динамика решений при условии $ a_0 = 1$	381
8.2.5. Случай $h_0 = 1/2$	383
8.3. Исследование стационарных режимов дифференциально-разностного уравнения динамики популяции насекомых	385
8.3.1. Основные результаты о режимах с одной генерацией в год	386
8.3.2. О доказательстве теорем 8.7–8.10	389
8.3.3. Режимы с $m > 1$ генерациями в год	396
8.3.4. О зависимости стационарных режимов от параметров h и λ	400
Список литературы	402
Глава 9. Динамика системы из двух логистических уравнений с запаздыванием, описывающих задачи «хищник — жертва» и «паразит — хозяин»	405
Введение	405
9.1. Сложные колебания в задаче «хищник — жертва»	405
9.1.1. Предварительные сведения	407
9.1.2. Результаты для случая $\lambda_1 \gg 1$	412
9.1.3. Вспомогательные утверждения	418
9.1.4. Обоснование теорем 9.1–9.5	427
9.1.5. Построение асимптотики решений	429
9.1.6. Исследование устойчивости	436

9.1.7. О задаче «хищник — жертва» с учетом возрастной структуры	446
9.1.8. Обсуждение результатов	447
9.2. Стационарные режимы в задаче «паразит — хозяин»	450
9.2.1. Постановка задачи и результаты	450
9.2.2. О некоторых выводах биологического характера	453
9.2.3. О зависимости стационарных режимов от коэффициента «давления»	454
9.2.4. О влиянии возрастной структуры на динамику изменения численностей	455
9.2.5. Обсуждение результатов	455
Список литературы	456
Глава 10. Релаксационные колебания в системах взаимодействующих популяций	459
10.1. Релаксационные колебания в моделях многовидовых сообществ	459
10.1.1. Вычисление инвариантов экологических уравнений	462
10.1.2. Сложные колебания в задаче о конкуренции видов	465
10.1.3. Динамика экосистем при наличии «хищника»	470
10.2. Асимптотика установившихся режимов конечно-разностных аппроксимаций логистического уравнения с запаздыванием и с малой диффузией	479
10.2.1. Колебания в одномерной области типа отрезка	481
10.2.2. О колебаниях на «окружности»	486
10.2.3. О доказательстве результатов	488
10.2.4. О колебаниях в двумерной области	491
Список литературы	497
Глава 11. Динамика конечномерных логистических отображений	501
Введение	501
11.1. Конечномерные отображения, описывающие динамику логистического уравнения с запаздыванием	501
11.1.1. Простейшие свойства логистического уравнения с запаздыванием. Постановка задачи	501
11.1.2. Вывод дискретного аналога логистического уравнения с запаздыванием	504
11.2. Область существования неотрицательного решения	505

11.3. Локальные свойства дискретного аналога логистического уравнения. Бифуркация Андронова—Хопфа . . .	513
11.4. Нелокальные устойчивые решения дискретного аналога логистического уравнения	518
11.5. Некоторые другие дискретные модели	522
11.6. О локальной динамике уравнений вида (11.39) с непрерывным временем	524
11.7. О динамике дифференциально-разностного уравнения, «близкого» к разностному уравнению (11.56)	525
Выводы	526
Список литературы	527
Глава 12. Обзор результатов, полученных с помощью метода большого параметра	531
Введение	531
12.1. Асимптотика аттракторов в простейших классах математических моделей с запаздыванием	531
12.1.1. Асимптотика периодического решения системы (12.2)	533
12.1.2. Асимптотика решений системы (12.5)	535
12.2. Колебания в системе уравнений, моделирующих иммунный отклик организма	538
12.3. Асимптотика колебаний в математической модели реакции Белоусова	539
12.4. Динамика системы уравнений, описывающих работу ядерного реактора	541
12.5. Сложные колебания в автогенераторе с инерционным запаздыванием	543
12.6. Релаксационные колебания в простейших моделях с запаздыванием	546
12.7. О релаксационных колебаниях в моделях динамики лазеров	552
12.8. Обзор результатов о динамике нейронных сетей	565
Список литературы	569

Нельзя построить содержательную общую теорию нелинейных систем, считал Джон фон Нейман.

Великий математик ошибался.

В этом убеждают книги этой серии, посвященные синергетической парадигме, нелинейной науке, бифуркациям, фракталам, хаосу и многим другим интересным вещам.

020



Сергей Александрович КАЩЕНКО

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова. Директор научно-образовательного центра «Нелинейная динамика».

Основные научные интересы: нелинейная динамика, синергетика. Автор более 250 научных работ, соавтор монографий «Управление риском» (М., 2000), «Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие» (М., 2002), «Нелинейные волны» (Нижний Новгород, 2005), «Модели волновой памяти» (М.: URSS).

Наше издательство предлагает следующие книги:



Издательская группа
URSS

Каталог изданий
в Интернете:
<http://URSS.ru>
E-mail: URSS@URSS.ru

117335, Москва,
Нахимовский
проспект, 56

Телефон / факс
(многоканальный)
+7 (499) 724 25 45

Отзывы о настоящем издании,
а также обнаруженные опечатки
присылайте по адресу
URSS@URSS.ru.
Ваши замечания и предложения
будут учтены и отражены
на web-странице этой книги
на сайте
<http://URSS.ru>

27061 ID 266784

