

В. Н. Афанасьев

---

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ  
НЕПРЕРЫВНЫМИ  
ДИНАМИЧЕСКИМИ  
СИСТЕМАМИ**

---

1049511



URSS

**В. Н. Афанасьев**

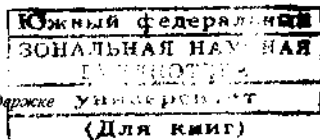
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ  
НЕПРЕРЫВНЫМИ  
ДИНАМИЧЕСКИМИ  
СИСТЕМАМИ**



**URSS  
МОСКВА**



Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований  
(проект № 20-18-00008), не подлежит продаже



154154

Афанасьев Валерий Николаевич

**Математическая теория управления непрерывными динамическими системами.**  
М.: КРАСАНД, 2020. — 480 с.

Данная книга подготовлена на основе курсов лекций по теории управления, читаемых автором в течение ряда лет студентам департамента прикладной математики Национального Исследовательского Университета «Высшая школа экономики» и физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Содержание книги является существенным развитием отдельных глав книги «Математическая теория конструирования систем управления» (В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов), изданной в 2003 году, а также дополнением новых разделов теории управления, появившихся в последнее десятилетие (включая материалы последних трех Международных Конгрессов по Автоматическому Управлению (IFAC 2011, 2014, 2018)). В эти же годы автором книги был получен ряд результатов по применению методов синтеза управлений нелинейными неопределенными объектами различной физической природы, основанные на использовании метода линеаризации обратной связи и метода «расширенной линеаризации». Эти методы в отечественной литературе недостаточно освещены. В отдельных главах книги эти методы излагаются более систематически и детально, чем в статьях и докладах иностранных авторов, с расширением их применения в задачах построения управлений нелинейными неопределенными системами.

Изложение материала носит строгий, но доступный характер. Этому способствует рассмотрение конкретных управляемых систем, встречающихся в различных областях механики, космонавтики, медицины

Список литературы в книге не претендует на полноту. В него включены основные как отечественные, так и зарубежные книги и статьи, освещающие современное состояние теории управления. Наряду с этим приведен список некоторых книг прошлых лет, в которых излагаются классические начала теории оптимального управления.

На основе отдельных разделов книги могут читаться курсы для студентов и аспирантов по современной теории управления, а также освоение материала книги поможет пониманию современных статей и монографий по специальным вопросам этой теории. Книга может быть полезной и специалистам, работающим в области управления разнообразными системами.

Издательство «КРАСАНД», 117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.

Формат 60x90/16. Тираж 300 экз. Печ. л. 30. Подписано в печать 07.10.2020. Заказ № 1006.

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленного электронного оригинал-макета  
в АО «Областная типография «Печатный двор»  
432049, г. Ульяновск, ул. Пушкирева, 27.

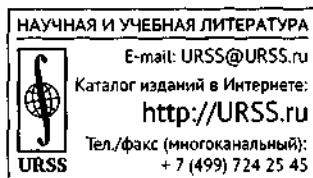
© КРАСАНД, 2020

ISBN 978-5-396-01013-0

27116 ID 256368



9 785396 010130



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	<b>8</b>
<b>Предварительные понятия и определения</b> .....	<b>16</b>
<b>Глава 1. Необходимые условия в задачах конструирования программных движений</b> .....	<b>43</b>
§ 1.1. Постановка задачи .....	43
§ 1.2. Задача со свободным правым концом и заданным временем окончания переходного процесса.....	45
§ 1.3. Задача с фиксированными значениями некоторых переменных состояния в заданный момент окончания переходного процесса .....	58
§ 1.4. Задача с фиксированными значениями некоторых переменных состояния в неопределенный момент окончания переходного процесса .....	68
§ 1.5. Задача с фиксированными значениями некоторых переменных состояния во внутренних точках траектории .....	81
§ 1.6. Задачи оптимизации при наличии ограничений на траекторию.....	84
1.6.1. Интегральные ограничения .....	84
1.6.2. Ограничения в виде равенства на управляющие переменные .....	88
1.6.3. Ограничения в виде равенства на функции управления и фазовые координаты .....	88
1.6.4. Ограничения в виде равенства на функции координат .....	89
1.6.5. Ограничения, заданные во внутренних точках траектории.....	91
1.6.6. Системы управления движением с разрывными частями во внутренних точках траектории .....	92
§ 1.7. Некоторые замечания .....	93

---

<b>Глава 2. Принцип максимума Понтрягина .....</b>	<b>96</b>
§ 2.1. Постановка задачи .....	96
§ 2.2. Задача со свободным правым концом и заданным временем окончания переходного процесса.....	105
§ 2.3. Задача с фиксированными значениями некоторых переменных состояния в заданный момент окончания переходного процесса .....	107
§ 2.4. Задача с фиксированными значениями некоторых переменных состояния в неопределенный момент окончания переходного процесса .....	115
§ 2.5. Задача об оптимальном быстродействии.....	122
§ 2.6. Задача на оптимум расхода ресурсов.....	130
§ 2.7. Пример решения задачи оптимального управления с помощью принципа максимума.....	137
§ 2.8. Некоторые замечания по принципу максимума.....	141
<b>Глава 3. Достаточные условия в задачах конструирования программных движений .....</b>	<b>144</b>
§ 3.1. Постановка задачи .....	144
§ 3.2. Переход к открытой области изменений управления.....	145
§ 3.3. Управление с обратной связью в задаче с заданным временем окончания переходного процесса.....	146
§ 3.4. Достаточные условия локального минимума при заданном времени окончания переходного процесса.....	150
§ 3.5. Достаточные условия локального минимума при незаданном времени окончания переходного процесса.....	155
§ 3.6. Уравнения для функционала качества .....	163
§ 3.7. Достаточные условия оптимальности .....	166
§ 3.8. Некоторые замечания относительно достаточных условий .....	172
<b>Глава 4. Динамическое программирование .....</b>	<b>174</b>
§ 4.1. Постановка задачи .....	174
§ 4.2. Уравнение Гамильтона—Якоби—Беллмана.....	176
§ 4.3. Существование решения уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана.....	182
§ 4.4. Достаточные условия оптимальности .....	187

---

§ 4.5. Связь метода динамического программирования с принципом максимума (минимума) Л. С. Понтрягина .....	189
§ 4.6. Пример решения задачи нахождения оптимального управления с помощью метода динамического программирования.....	190
§ 4.7. Численное решение уравнений динамического программирования .....	193
§ 4.8. Некоторые замечания по применимости принципа динамического программирования .....	196
<b>Глава 5. Оптимальное управление линейными объектами ....</b>	<b>198</b>
§ 5.1. Структурные свойства линейных систем .....	198
5.1.1. Устойчивость .....	198
5.1.2. Управляемость .....	203
5.1.3. Наблюдаемость .....	205
5.1.4. Приводимость линейных однородных систем.....	206
§ 5.2. Постановка задачи оптимального управления.....	209
§ 5.3. Задача со свободным правым концом и заданным временем окончания переходного процесса.....	212
§ 5.4. Задача о регуляторе выхода .....	232
§ 5.5. Задача слежения .....	234
§ 5.6. Задача с фиксированными значениями некоторых переменных состояния в заданный момент окончания переходного процесса .....	244
§ 5.7. Задача об оптимальном быстродействии при ограничениях на управляющие воздействия .....	248
§ 5.8. Задача управления при неполной информации о состоянии объекта.....	253
§ 5.9. Некоторые замечания .....	263
<b>Глава 6. Дифференциальные игры .....</b>	<b>265</b>
§ 6.1. Постановка задачи .....	265
§ 6.2. Дифференциальная игра как проблема оптимального управления .....	269
§ 6.3. Линейные игры преследования с квадратичным функционалом .....	273
§ 6.4. Задача на минимум времени перехвата с ограничениями на управления.....	279

§ 6.5. Дифференциальная игра с несколькими игроками в задаче защиты цели.....	281
6.5.1. Дифференциальная игра с распределенной информацией.....	283
6.5.2. Распределенные стратегии для игры «преследователь—убегающий» .....	286
6.5.3. Дифференциальная игра с шумами .....	289
6.5.4. Пример.....	291
§ 6.6. Задачи дифференциальных игр с нелинейными неопределенными динамическими объектами .....	295
§ 6.7. Общие замечания к теории дифференциальных игр.....	303
<b>Глава 7. Некоторые дополнительные вопросы теории управления.....</b>	<b>305</b>
§ 7.1. Существование оптимального управления .....	305
7.1.1. Постановка задачи и основные определения.....	305
7.1.2. Основная теорема.....	306
7.1.3. Анализ основной теоремы.....	311
§ 7.2. Особые оптимальные управления.....	314
7.2.1. Линейные динамические системы с квадратичным критерием качества .....	314
7.2.2. Особые решения в задачах оптимизации нелинейных систем .....	318
7.2.3. Условия в точках сопряжения участков.....	324
§ 7.3. Четеринг-режимы .....	325
§ 7.4. Скользящие режимы.....	332
7.4.1. Скользящие оптимальные режимы.....	332
7.4.2. Устойчивость системы со скользящими режимами .....	340
7.4.3. Стабилизация линейного стационарного объекта.....	347
7.4.4. Условие устойчивости скользящего движения .....	357
§ 7.5. Общие замечания к обоснованию условий существования оптимального управления .....	367
<b>Глава 8. Управление системами, линеаризуемыми обратной связью.....</b>	<b>368</b>
§ 8.1. Постановка задачи .....	368
§ 8.2. Локальное преобразование координат для SISO систем.....	371
§ 8.3. Локальное преобразование координат для MIMO систем ...	381

§ 8.4. Существование линеаризации нелинейной системы обратной связью .....	392
§ 8.5. Теоретические основы метода гарантирующего управления нелинейным объектом .....	409
§ 8.6. Синтез управления на основе уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана .....	417
§ 8.7. Анализ устойчивости субоптимального решения .....	422
§ 8.8. Выводы .....	424
<b>Глава 9. Нелинейные системы с параметрами, зависящими от состояния .....</b>	<b>426</b>
§ 9.1. Постановка задачи. Математические модели .....	426
§ 9.2. Задача оптимального и субоптимального управления системами с параметрами, зависящими от состояния .....	435
9.2.1. Задача оптимального управления с заданным временем окончания переходного процесса .....	435
9.2.2. Задача субоптимального управления при $T \rightarrow \infty$ .....	442
§ 9.3. Метод расширенной линеаризации в задаче дифференциальной игры .....	454
9.3.1. Оптимальные управления дифференциальной игры с заданным временем окончания переходного процесса .....	456
9.3.2. Оптимальные управления - дифференциальной игры в неопределенный момент окончания переходного процесса .....	461
§ 9.4. Пример. Синтез управления для модели реактора на тяжелой воде .....	466
9.4.1. Постановка задачи .....	466
9.4.2. Синтез SDRE-управления .....	468
9.4.3. Гарантирующее управление .....	471
§ 9.5. Выводы .....	471
<b>Список дополнительной литературы .....</b>	<b>473</b>
<b>Summary .....</b>	<b>478</b>



## Summary

This book has been prepared on the basis of lecture courses on the control theory delivered by the author for several years to students of the Department of Applied Mathematics of the Higher School of Economics National Research University and the Physics Department, Moscow State University. The content of the book is a significant development of individual chapters of the book “Mathematical Theory of Design of Control Systems” (V. N. Afanasyev, V. B. Kolmanovsky, V. R. Nosov), published in 2003, as well as supplementing new sections of control theory that appeared in the last decade (including the materials of the last three International Congresses on Automatic Control (IFAC 2011, 2014, 2018)). In the same years, the author of the book obtained a number of results on the application of control synthesis methods for nonlinear indefinite objects of various physical of natural nature, based on the use of the linearization feedback method and the “extended linearization” method. These methods are not adequately covered in Russian literature. In some chapters of the book, these methods are described more systematically and in detail than in articles and reports of foreign authors, with the expansion of their application in problems of constructing controls by nonlinear indefinite systems.

The presentation of the material is rigorous, but affordable. This is facilitated by the consideration of specific controlled systems found in various fields of mechanics, astronautics, and medicine.

The list of references in the book does not claim to be complete. It includes the basic both domestic and foreign books and articles covering the current state of control theory. Along with this, a list of some books of past years is given, which sets out the classical principles of optimal control theory.

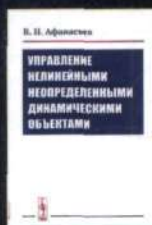
Based on individual sections of the book, courses for students and postgraduate students on modern control theory can be taught, and mastering the material of the book will help understanding modern articles and monographs on special issues of this theory. The book may be useful to specialists working in the field of controlling a variety of systems.



## Валерий Николаевич АФАНАСЬЕВ

Доктор технических наук, профессор Высшей школы экономики, главный научный сотрудник Института проблем управления имени В. А. Трапезникова Российской академии наук. Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации. Специалист в области теории управления динамическими объектами различной физической природы. Окончил факультет автоматки и вычислительной техники Московского института электронного машиностроения (Московский институт электроники и математики). Автор монографий и статей, среди которых большой цикл работ об управлении неопределенными нелинейными динамическими объектами. Руководитель ряда инициативных проектов РФФИ. Подготовил 3 докторов наук и 32 кандидатов наук.

### Наше издательство предлагает следующие книги:



ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА  
**URSS**  
Тел. (многоканальный)  
+7 (499) 724 25 45  
<https://URSS.ru>

Отзывы о настоящем издании, обнаруженные опечатки присылайте по адресу [URSS@URSS.ru](mailto:URSS@URSS.ru). Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги.



117335, Москва, Нахимовский проспект, 56

27116 ID 256368



9 785396 010130