ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

UNIVERSITY NEWS
NORTH-CAUCASIAN REGION
TECHNICAL SCIENCES SERIES

Регистрационный номер 011020
Комитета Российской Федерации по печати
Научно-образовательный и прикладной журнал
Издается с 1973 г.
Периодичность серии 4 номера в год
№ 1(186) 2016 г.

DOI: 10.17213/0321-2653-2016-1

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

CONTENTS

INFORMATICS, COMPUTER ENGINEERING AND CONTROL

УДК 004.274 DOI: 10.17213/0321-2653-2016-1-10-14

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА ТОЧНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ В СОВРЕМЕННЫХ ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ИНТЕГРИРУЮЩЕГО ТИПА

RESEARCH OF THE ACCURACY OF ANY CONTINUOUS FUNCTION IN MODERN PROBLEM-ORIENTED INTEGRATING TYPE COMPUTING SYSTEM

 В.Ф. Гузик, Д.А. Беспалов

Гузик Вячеслав Филиппович – д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Вычислительная техника», Институт компьютерных технологий и компьютерной безопасности, Инженерно-технологическая академия Южного федерального университета, г. Таганрог, Россия. Тел. 8 (8634) 37-16-56. E-mail: vfguzik@sfedu.ru

Беспалов Дмитрий Анатольевич – канд. техн. наук, доцент, кафедра «Вычислительная техника», Институт компьютерных технологий и компьютерной безопасности, Инженерно-технологическая академия Южного федерального университета, г. Таганрог, Россия. E-mail: bda82@mail.ru

Guzik Vyacheslav Filippovich – Doctor of Technical Sciences, professor, head of department «Computer Science» Institute of Computer Technology and Computer Security Institute zhenerno-Technological Academy, Southern Federal University, Taganrog, Russia. Ph. 8 (8634) 37-16-56. E-mail: vfguzik@sfedu.ru

Bespalov Dmitry Anatolyevich – Candidate of Technical Sciences, assistant professor, department «Computer Science» Institute of Computer Technology and Computer Security Institute zhenerno-Technological Academy, Southern Federal University, Taganrog, Russia. E-mail: bda82@mail.ru

Рассматриваются проблемы точности представления аналоговых данных в виде непрерывных функций в современных проблемно-ориентированных вычислительных системах интегрирующего типа. В частности, исследуются проблемы погрешности квантования непрерывной функции по уровню и по независимой переменной, свойства и статистические характеристики отдельных квантов представления информации, особенности определения величины интервала представления и формальное описание погрешностей и рекомендации к оптимальной аппроксимации непрерывной функции полиномами для решения задачи на цифровом интеграторе. Далее предложен способ оптимального представления непрерывных функций на равномерных и неравномерных дискретных сетках в рамках интерпретации процесса ввода данных в виде интерполяционного процесса.

Ключевые слова: проблемно-ориентированная вычислительная система; цифровой интегратор; квантование; погрешность; дискретизация.

This article presents a study on the accuracy of representation of continuous functions in modern problem-oriented computer systems integrating type arising when entering data from external analog signal. Regarded as the quantization error and Optimum sampling of uniform and non-uniform time grid.

Keywords: problem-oriented computer; digital integrator; the quantization error; sampling.

Введение

Во многих современных системах, ориентированных на цифровую обработку сигналов, точкой входа являются реальные данные, представленные в непрерывной форме. Это означает, что вычислитель имеет аналоговый вход и специальный блок, выполняющий функции аналогово-цифрового преобразователя (АЦП). Естественно, что современные промышленные образцы имеют приемлемые характеристики скорости и точности, однако они не адаптированы для применения в составе проблемно-ориентированных вычислительных систем (ПОВС) интегрирующего типа [1].

В данной работе проводится исследование вопросов представления непрерывных сигналов дискретными наборами значений в рамках концепции современных цифровых интегрирующих машин (ЦИМ) и предлагаются шаги для улучшения блоков ввода аналоговых данных в изучаемых системах [2, 3]. В частности, рассматриваются проблемы погрешности квантования исходной непрерывной функции и задача представления данных оптимальным количеством отсчетов.

Погрешность квантования непрерывной функции

Рассмотрим вопрос погрешности квантования исходной непрерывной функции.

При исследовании погрешностей любого вида, образующихся в результате математической операции над округленными числами, выдвигают гипотезу, что погрешность является случайной величиной, имеющей равномерное распределение в некотором интервале. Рассмотрим этот вопрос более подробно в рамках концепции цифровых интегрирующих машин.

В любом случае дискретная версия входного реального сигнала образуется на входе вычислительной части проблемно-ориентированной системы (ПОВС) интегрирующего типа после отсечения по уровню (квантования). Причем, применительно к цифровым интегрирующим машинам (ЦИМ) [4, 5] характерно использовать один из трех следующих типов квантования: квантование с избытком, квантование с недостатком, а также квантование в среднем.

Естественно, что при замене неквантованной непрерывной функции в отдельных точках дискретными значениями возникает погрешность квантования:

$$\beta = y - \overline{y}.$$

При анализе этого процесса остановимся только на одном из способов квантования – квантовании с недостатком. Погрешности остальных типов статистически схожи. Тогда для некоторой непрерывной функции

$$y = y(x) \tag{1}$$

существует операция квантования с недостатком K_H, такая что:

$$\overline{y_H} = K_H[y(x)].$$

Тогда анализируемая погрешность равна:

$$\beta_H(x) = y(x) - \overline{y_n}(x). \tag{2}$$

Введем некоторый аргумент x_l на дискретной оси времени $l = 0, 1, 2, ...$ для которого погрешность квантования $\beta_H(x_l) = 0$. Кроме того, в окрестности этой точки функция непрерывна и имеет все производные. Далее рассмотрим окрестность точки существования аргумента в пределах (x_l, x_m). В конце интервала $[l, m]$ в точке x_m существует

$$y(x_m) = y(x_l) + \Delta y. \tag{3}$$

В таком случае Δy будем называть квантом функции $y(x)$.

Обратим внимание на разложение функции $y(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_l:

$$y(x) = y(x_l) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_l)^n}{n!} y^{(n)}(x_l).$$

Так как на интересующем нас интервале (x_l, x_m) известно, что

$$\overline{y}_n(x) = y(x_l), \tag{4}$$

то, согласно выражению (2), на этом интервале

$$\beta_H(x) = y(x) - \overline{y}_n(x) =$$
$$= y(x_l) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_l)^n}{n!} y^{(n)}(x_l) - y(x_l) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_l)^n}{n!} y^{(n)}(x_l). \tag{5}$$

Далее следует учесть, что при обработке в цифровой интегрирующей машине изменяющиеся величины квантуются не только по уровню, но и по независимой переменной. В связи с этим имеет смысл обратить внимание на погрешности именно в точках существования таких значений, т. е. о такой независимой переменной x.

Можно утверждать, что при решении задач в ЦИМ точные значения $y(x_i)$ вообще говоря неизвестны в точках существования. Тогда и значения погрешности $\beta_H(x_i)$ можно считать случайной величиной. Единственное, что в этом случае остается – применить некоторые вероятностные методы исследования.

В этом случае вместо математического ожидания погрешности квантования $M[\beta_H(x_l)]$ будем использовать математическое ожидание погрешности квантования $M[\beta_H(x)]$ в окрестности (x_l, x_m), которому принадлежат точки x_i.

$$M[\beta_H(x_i)] = \frac{1}{x_m - x_l} \int_{x_l}^{x_m} \beta_H(x) dx. \tag{6}$$

Аналогично определим дисперсию $D[\beta_H(x_i)]$ погрешности квантования как:

$$D[\beta_H(x_i)] = \frac{1}{x_m - x_l} \int_{x_l}^{x_m} \{\beta_H(x) - M[\beta_H(x_i)]\}^2 dx. \tag{7}$$

Подставим $\beta_H(x)$ из выражения (5) в равенство (6), получим:

$$M[\beta_H(x_i)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_m - x_l)^n}{(n+1)!} y^{(n)}(x_l). \tag{8}$$

Для определения величины интервала $(x_m - x_l)$ выражение (1) преобразуем в обратную функцию, т. е. $x = \varphi^{-1}(y)$. Тогда можем положить, что $x_m = \varphi^{-1}(y_m)$ и $x_l = \varphi^{-1}(y_l)$. Откуда:

$$x_m - x_l = \varphi^{-1}(y_m) - \varphi^{-1}(y_l),$$

или, исходя из (3),

$$x_m - x_l = \varphi^{-1}[y(x_l) + \Delta y] - \varphi^{-1}[y(x_l)].$$

Так как согласно (4) можно определить $\overline{y}_H(x) = y(x_l)$, что:

$$x_m - x_l = \varphi^{-1}[\overline{y}_H(x) + \Delta y] - \varphi^{-1}[\overline{y}_H(x)].$$

Откуда математическое ожидание погрешности (8) преобразуется к виду:

$$M[\beta_H(x_i)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{\varphi^{-1}[\overline{y}_H(x) + \Delta y] - \varphi^{-1}[\overline{y}_H(x)]\}^n}{(n+1)!} y^{(n)}(x_l). \quad (9)$$

Для определения математического ожидания (9) погрешности квантования в конкретной цифровой интегрирующей машине необходимо знать алгоритм интегрирования [6], который заложен в элементарные вычислительные элементы – цифровые интеграторы.

Однако, в общем виде, можем принять, что данный вычислительный элемент применяется для решения следующего соотношения:

$$dz(x) = y_p(x) dy_q(x); \quad \nabla z(x) = \int_{x_l}^{x_l + \nabla x} y_p(x) dy_q(x),$$

где под ∇x будем понимать приращение независимой переменной, а ∇z – приращение интеграла.

Подынтегральную функцию и переменную, по которой ведется интегрирование, можем аппроксимировать полиномом [7]. Тогда верно, что для $y_p(x)$ существует оптимальная аппроксимация полиномом $P_k(x)$ порядка k, а для переменной интегрирования $y_q(x)$ существует аппроксимация полиномом $P_l(x)$ порядка l.

Тогда

$$\nabla z_{i+l}(x) = \int_{x_l}^{x_l + \nabla x} P_k(x) dP_l(x) = P_{(k+l-1)}(x_l).$$

Результатом вычисления будет аппроксимирующий полином $P_{(k+l-1)}(x_l)$ порядка $(k+l-1)$.

Таким образом, решение задачи на цифровом интеграторе сводится к решению приведенного выше полинома заданного порядка.

Доказано, например, что, если в ПОВС интегрирующего типа, вычислительные блоки работают по формуле трапеций, то решение получается в виде замены подынтегральной функции полиномом 1-го порядка, как частного случая формулы Котеса:

$$\nabla z = a_0 + a_1 x.$$

Тогда на заданном интервале (x_l, x_m) в окрестности точки x_l приращение функции будет равно одному кванту ∇z. То есть:

$$\nabla z = \nabla z(x_m) - \nabla z(x_l) = a_1(x_m - x_l),$$

откуда можно вычислить, что:

$$x_m - x_l = \frac{\nabla z}{a_1}. \quad (10)$$

Из выражения (8) можем получить математическое ожидание погрешности квантования, применяя равенство (10):

$$M[\beta_H(x_i)] = \frac{(x_m - x_l)}{2!} a_1 = \frac{\nabla z}{2}. \quad (11)$$

То есть математическое ожидание погрешности квантования с недостатком при интегрировании в ПОВС интегрирующего типа по методу трапеций равно половине кванта анализируемой функции.

Соединив выражение (7) с равенствами (5) и (11), получим:

$$D[\beta_H(x_i)] = \frac{\nabla z^2}{12}. \quad (12)$$

При этом, величины математического ожидания (11) и дисперсии (12) соответствуют равномерному закону распределения. Однако, если при интегрировании в процессорном элементе по алгоритму трапеций равномерный закон распределения погрешности позволит свести к нулю, то при использовании формулы параболы, даже квантование в среднем не даст нулевое математическое ожидание ошибки.

В этом случае принятое положение о равномерности распределения погрешности квантования в ЦИМ справедливо только для простых форм интегрирования, а интегрирование по методу парабол и более сложные способы – это тема дальнейших исследований.

Способ оптимального дискретного представления непрерывных функций

Вторым важным вопросом, который предстоит решить, является проблема разумного способа дискретного представления непрерывных сигналов (функций), так как от этого в значительной степени зависят многие ключевые параметры ПОВС (точность представления данных, емкость каналов связи, объем используемой памяти, быстродействие и т.п.).

Во многих случаях процесс представления непрерывных данных решается с помощью теоремы Котельникова. То есть, если непрерывная функция $f(t)$ такова, что имеет место

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega_C}^{\omega_C} \tilde{F}(\omega) l^{i\omega t} d\omega. \quad (13)$$

То есть спектр функции $f(t)$ ограничен частотами $(-\omega_C, \omega_C)$ и, в соответствии с выражением (13) при переходе в дискретную область, можно получить:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(k\frac{\pi}{\omega_C}\right) \frac{\sin\omega\left(t - k\frac{\pi}{\omega_C}\right)}{\omega\left(t - k\frac{\pi}{\omega_C}\right)}. \quad (14)$$

Таким образом, накладывая требование ограниченности спектра, мы можем представить всю информацию о сигнале множеством дискретных значений, отстоящих друг от друга на равные промежутки времени. При этом стоит помнить, что использование теоремы Котельникова связано с определенными трудностями, так как конечность спектра в общем случае противоречит конечной длительности реальных физических сигналов.

В этой связи можно интерпретировать задачу квантования как пример интерполяционного процесса для функции $f(t)$, заданной на конечном временном интервале $(-T,T)$, что дает нам на основании выражения (14) следующую формулу:

$$f(t)=\varphi(t)=\sum_{k=1}^{N} f(k\Delta)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-k\Delta)}{\frac{\pi}{\Delta}(t-k\Delta)}. \qquad (15)$$

Здесь шаг квантования Δ определяется в общем случае свойствами интерполяционной формулы и выбирается таким, чтобы точность представления $f(t)$ была в пределах заданных значений – согласно проведенному выше исследованию. Однако такой выбор пока не связан со спектральными свойствами самого сигнала.

Заметим, что остаточный член ряда (15) неизвестен, причем неизвестно даже то, сходится ли вообще данный интерполяционный процесс при $\Delta\to 0$ для функции конечной гладкости.

Относительно модели сигнала в виде функции с ограниченным спектром можно заметить следующее. Будучи во многих случаях физически оправданным, применение такой модели для целей аппроксимации не всегда правильно.

Пусть функция $f(t)$ задана и непрерывна вместе со своими k производными на известном и конечном интервале времени $(-T,T)$, тогда для любых $\varepsilon>0$ и $\omega_C>0$ можно найти такую имеющую ограниченный спектр функцию $\varphi(t)$, что будет верным:

$$\min_{t\in[-T,T]}\left\{|f(t)-\varphi(t)|;|f'(t)-\varphi'(t)|;...;f^{(k)}(t)-\varphi^{(k)}(t)\right\}<\varepsilon. \qquad (16)$$

При этом ω_C является четкой нижней границей спектра $\varphi(t)$.

Способ представления данных, построенный на принципе аппроксимации по формулам (15) и (16), является не единственным. Можно использовать, например, кусочно-линейную интерполяцию или другие методы, но они имеют иные требования к точности и методы восстановления функции.

С точки зрения авторов, одной из самых важных проблем здесь является даже не точность представления всех данных, а корректность передачи всей важной информационной составляющей функции. Причем, здесь речь идет именно о выделении основной информации, о функции из некоторого ограниченного множества аппроксимаций.

В таком случае можно обратиться к метрическим свойствам функционального пространства анализируемых данных. Для рассматриваемого метрического пространства G найдем величину, называемую n-мерным поперечником:

$$d_n=\inf_{\varphi_1...\varphi_n}\sup_{f\in G}\min_{\alpha_1...\alpha_n}\left\|f(t)-\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\varphi_i(t)\right\|. \qquad (17)$$

Данный параметр позволит нам определить нижнюю границу точности, которой можно достичь при аппроксимации функции из G по n параметрам.

Для пространства $C^P=(M,T)$ функций, заданных на отрезке $[0,T]$, для которых существует $(P-1)$ производная, удовлетворяющая условию Липшица, можно утверждать [8], что при восстановлении функции по n равноудаленным друг от друга точкам (дискретам) при помощи локальных полиномов $(p+1)$ порядка, получаемая погрешность равна n-мерному поперечнику (17), т. е. для такого рода пространств описанный выше способ восстановления является наилучшим и оптимальным с точки зрения минимизации потери данных при представлении их для ЦИМ.

В этом случае число отсчетов (т. е. n значений функции), задающих информационное содержание входных данных, можно определить следующим отношением:

$$d_n=\inf_{\varphi_1...\varphi_n}\sup_{f\in G}\min_{\alpha_1...\alpha_n}\left\|f(t)-\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\varphi_i(t)\right\|<\varepsilon,$$

где ε – необходимая, заданная заранее точность.

Здесь также имеет смысл упомянуть, что квантование сигналов по уровню на входе ЦИМ не обязательно выполнять равномерно по временной шкале [9]. Более того, можно утверждать, что такой подход приводит к избыточности в представлении сигналов, особенно в локальных областях с высокой гладкостью. При этом избыточность растет пропорционально устанавливаемому показателю точности как $\log\frac{1}{\varepsilon}$.

Данная проблема оптимизации представления непрерывных сигналов в ПОВС интегрирующего типа также является интересной и требует более пристального внимания.

Заключение

Таким образом, в данной статье проведено исследование вопроса точности представления непрерывных функций в современных ПОВС интегрирующего типа, возникающих при вводе данных от внешних источников аналогового сигнала. Рассмотрены как погрешности квантования, так и вопросы оптимальности дискретизации [10] по равномерным и неравномерным временным сеткам. Сделаны соответствующие выводы и определено направление дальнейших исследований.

Литература

1. *Гузик В.Ф.* Проектирование проблемно-ориентированных вычислительных систем. Ч. 1: Монография. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. 463 с.
2. *Proakis J., Manolakis D.* Digital signal processing, principles, algorithms, and applications. PHI Publications, 1999.
3. *Feldmeier E., Haberer T.* Development of a high precision integrator for analog signals to measure magnetic fields in real-time // Proceedings of IPAC2013, Shanghai, China, MOPWA001. P. 661 – 663, 2013.
4. *Батраков А.М., Ильин И.В., Павленко А.В.* Прецизионные цифровые интеграторы с точной синхронизацией // Автометрия. 2015. Т. 51, № 1. С. 62 – 69.
5. *Dorcak L., Petras I., Zborovjan M.* Comparison of the methods for discrete approximation of the fractional-order operator // Acta Montanistica Slovaca. 2003. P. 236 – 239.
6. *Krishna B.T., Reddy K.V.V.S.* Design of digital differentiators and integrators of order 1/2. Department of ECE, GITAM University, Visakhapatnam, India. 2008. 6 p.
7. *Каляев А.В.* Введение в теорию цифровых интеграторов, Киев: «Наукова думка», 1964.
8. *Фрум-Кетков Р.Л.* О метрическом поперечнике функциональных пространств // Успехи математических наук. 1965. Т. XX, вып. 4 (124).
9. *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.Н.* ε-энтропия и -емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи математических наук. 1959. Т. XIV. вып. 2 (86).
10. *Vinagre B., Chen Y., Petras I.* Two direct tustin discretization methods for fractional-order differentiator and integrator // J. Franklininst. 2003. 340(5). P. 349 – 362.

References

1. Guzik V.F. *Proektirovanie problemno-orientirovannykh vychislitel'nykh sistem. Chast' 1* [Design of problem-oriented computing systems. Part 1]. Taganrog, Izd-vo TTI YuFU. 2009, 463 p.
2. Proakis J., Manolakis D. Digital signal processing, principles, algorithms, and applications. PHI Publications, 1999.
3. Feldmeier E., Haberer T. Development of a high precision integrator for analog signals to measure magnetic fields in real-time. Proceedings of IPAC2013, Shanghai, China, MOPWA001, p.661-663, 2013.
4. Batrakov A.M., Il'in I.V., Pavlenko A.V. Pretsizionnye tsifrovye integratory s tochnoi sinkhronizatsiei [Precision digital integrators with exact synchronization]. *Avtometriya*, 2015, vol. 51, no. 1, pp.62-69.
5. Dorcak L., Petras I., Zborovjan M. Comparison of the methods for discrete approximation of the fractional-order operator. Acta Montanistica Slovaca, 2003, 236–239.
6. Krishna B.T., Reddy K.V.V.S. Design of digital differentiators and integrators of order 1/2. Department of ECE, GITAM University, Visakhapatnam, India. 2008. 6 p.
7. Kalyaev A.V. *Vvedenie v teoriyu tsifrovykh integratorov* [Introduction to the theory of digital integrators]. Kiev, «Naukova dumka», 1964.
8. Frum-Ketkov R.L. O metricheskom poperechnike funktsional'nykh prostranstv [About the metric diameter of functional spaces]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. XX, no. 4 (124), 1965.
9. Kolmogorov A.N., Tikhomirov V.N. ε-entropiya i ε-emkost' mnozhestv v funktsional'nykh prostranstvakh [ε-entropy and ε-capacity sets in functional spaces]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1959. Vol. XIV, № 2 (86).
10. Vinagre B., Chen Y., Petras I. Two direct tustin discretization methods for fractional-order differentiator and integrator. J. Franklininst, 2003, № 340(5), pp. 349–362.

Поступила в редакцию ***11 ноября 2015 г.***