

В.Ф. ГУЗИК, Е.В. ЛЯПУНЦОВА, В.И. ШМОЙЛОВ

НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ и их применение

Библиотеке ИТЯ ФФУ

13.11.2015
г. Таганрог *В.Шмойлов*

Москва
Издательство ФИЗМАТЛИТ
2015

УДК 517.524
Г93

Рецензенты:

доктор технических наук, проф. **Гайдук А.Р.**;
доктор технических наук, проф. **Ковалёв О.Ф.**

Г93 Гузик В.Ф., Ляпунцева Е.В., Шмойлов В.И.

Непрерывные дроби и их применение. – М.: ФИЗМАТЛИТ,
2015. – 298 с.
ISBN 978-5-9221-1648-0

В книге излагаются основы теории непрерывных дробей. Помимо классического, рассматривается иное определение сходимости непрерывных дробей. Новый метод суммирования используется при определении значений расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей и рядов, а также при решении алгебраических уравнений и систем линейных алгебраических уравнений. Особое внимание уделено методу решения бесконечных СЛАУ. Приведены непрерывные дроби, которые могут быть эффективно использованы при вычислении элементарных и специальных функций. Имеются сведения из истории непрерывных дробей.

Книга может быть полезна специалистам, работающим в прикладной и вычислительной математике, а также студентам и аспирантам, обучающимся по этим специальностям.

Илл. 56. Табл. 119. Библиогр.: 82 назв.

Работа поддержана Минобрнауки РФ в рамках реализации базовой части госзадания 2014/174 на выполнение НИР (проект №2336).

ISBN 978-5-9221-1648-0

УДК 517.524

© В.Ф. Гузик, Ляпунцева, В.И. Шмойлов, 2015
© Издательство «Физматлит», 2015

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Арнольд В.И. Цепные дроби. – М.: МЦНМО, 2000. – 40 с.
2. Бейкер Дж., Грейс-Моррис П. Аппроксимации Паде: пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т.1,2,3. – М.: Наука, 1965-1967.
4. Благовещенский Ю.В., Теслер Г.С. Вычисление элементарных функций на ЭВМ. – Киев: Техніка, 1977. – 208 с.
5. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
6. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматиз, 1963. – 1100 с.
8. Данилов В.Л., Иванова А.Н., Хованский А.Н. и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). – Физматгиз, – М., 1961. – 439 с.
9. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: – пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
10. Ильин В.Н., Кузнецов Ю.И. Трёхдиагональные матрицы и их приложения. – М.: Наука, 208 с.
11. История отечественной математики. / И.З. Штокало. Т.1 – Киев, 1966, Т.2 – Киев, 1967. Т.3 – Киев, 1968. Т.4 (в двух книгах), – Киев, 1970.
12. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х т. под ред. А.П. Юшкевича Т.3. Математика XVIII столетия. – М.: Наука, 1972. – 495 с.
13. Каган В. Ф. Основания теории определителей. Гос. Изд. Украины. – Одесса, 1922. – 521 с.
14. Качмар В.С., Русын Б.П., Шмойлов В.И. Алгоритмы вычисления значений цепных дробей. – Ж. выч. матем. и мат. физики, 1998, Т. 38, №9. – 1436-1451 С.
15. Кутисев Г.П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени. Теория, методы, алгоритмы. – М.: ЛКИ, 2010. – 232 с.
16. Кымпан Ф. История числа π . – М.: Наука, 1971. – 216 с.
17. Левин В.И. Сриниваза Рамануджан. – Историко-математические исследования. – Т. XIII. – М.: Физматгиз, 1960.
18. Левин В.И. Сриниваза Рамануджан – математический гений Индии. – М.: Знания, 1968. – 46 с.
19. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 534 с.
20. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. – Киев: Наукова думка, 1984. – 599 с.
21. Рутисхаузер Г. Алгоритм частных и разностей. – М.: ИИЛ, 1960. – 93 с.
22. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 654 с.
23. Скоробогатко В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
24. Смирнов В.И., Кулябко В.С. Михаил Софронов – русский математик середины XVIII века. – М. – Л.: – Изд-во АН СССР, 1954. – 53 с.

25. Справочник по специальным функциям/ под ред. М. Абрамовича и М. Стиган пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
26. С т и л т ь е с Т. Исследования о непрерывных дробях. – Харьков, – Киев: ОНТИ, 1936. – 155 с.
27. Х а р д и Г. Расходящиеся ряды. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1951. – 504 с.
28. Х е м м и н г Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
29. Х и н ч и н А.Я. Цепные дроби. – М., – Л.: ОНТИ, 1935. – 104 с.
30. Х л о п о н и н С.С. Приближение функций цепными дробями. – В кн.: Цепные дроби. – Ставрополь, 1977. – 3-102 с.
31. Х о в а н с к и й А.Н. Применение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого анализа. – М.: Гостехиздат, 1956. – 203 с.
32. Ц е й т е н Г.Г. История математики в XVI и XVII столетиях. – 2-е изд. – М., – Л.: ГОНТИ, 1938. – 456 с.
33. Ч е б о т а р ё в Н.Г. Теория непрерывных дробей. – Казань, 1938.
34. Ш м о й л о в В. И. Соответствующие цепные дроби. – Препринт 75-19 Ин-та кибернетики. – Киев, 1975. – 37 с.
35. Ш м о й л о в В.И. Суммирование расходящихся цепных дробей. – Львов: ИППММ НАН Украины, 1997. – 23 с.
36. Ш м о й л о в В.И. Определение значений расходящихся цепных дробей и рядов. – Львов: ИППММ НАН Украины, 1997. – 70 с.
37. Ш м о й л о в В.И. Периодические цепные дроби. – Львов: Академический Экспресс, 1998. – 219 с.
38. Ш м о й л о в В.И., С л о б о д а М.З. Расходящиеся непрерывные дроби. – Львов: Меркатор, 1999. – 820 с.
39. Ш м о й л о в В.И., Ч и р у н Л.В. Непрерывные дроби и комплексные числа. – Львов: Меркатор, 2001. – 564 с.
40. Ш м о й л о в В. И. Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями. – Львов: Меркатор, 2003. – 599 с.
41. Ш м о й л о в В.И. Непрерывные дроби и две классические задачи алгебры. – Львов: Меркатор, 2003. – 862 с.
42. Ш м о й л о в В.И. Непрерывные дроби. Библиографический указатель. – Львов: Меркатор, 2003. – 171 с.
43. Ш м о й л о в В.И., Т у ч а п с к и й Р.И. Алгебраические уравнения. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Библиографический указатель. – Львов: Меркатор, 2003. – 83 с.
44. Ш м о й л о в В.И., М а р ч у к М.В., Т у ч а п с к и й Р.И. Непрерывные дроби и некоторые их применения. – Львов: Меркатор, 2003. – 784 с.
45. Ш м о й л о в В.И., М а р ч у к М.В. Тучапский Р.И. Суммирование непрерывных дробей по Никкипорцу. – Львов: Меркатор, 2004. – 513 с.
46. Ш м о й л о в В.И. Непрерывные дроби. В 3-х т. Т.1. Периодические непрерывные дроби / Нац. акад. наук Украины, Инс-т приклад. проблем механики и математики. – Львов: Меркатор, 2004. – 645 с.
47. Ш м о й л о в В.И., Непрерывные дроби. В 3-х т. Т.2 Расходящиеся непрерывные дроби. / Нац. акад. наук Украины, Инс-т приклад. проблем механики и математики. – Львов: Меркатор, 2004. – 558 с.
48. Ш м о й л о в В.И. Непрерывные дроби. В 3-х т. Т.3. Из истории непрерывных дробей. / Нац. акад. наук Украины, Инс-т приклад. проблем механики и математики. – Львов: Меркатор, 2004. – 520 с.

49. Ш м о й л о в В.И. Ультрапериодические непрерывные дроби. – Львов: Меркатор, 2004. – 338 с.
50. Ш м о й л о в В.И. Расходящиеся системы линейных алгебраических уравнений. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. – 205 с.
51. Ш м о й л о в В.И. Решение алгебраических уравнений при помощи r/φ -алгоритма. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – 330 с.
52. Ш м о й л о в В.И., Коваленко В.Б. Некоторые применения алгоритма суммирования расходящихся непрерывных дробей. – Вестник Южного научного центра РАН. – Т. 8, № 4, 2012. – С. 3 – 13.
53. Ш м о й л о в В.И. Непрерывные дроби и r/φ -алгоритм. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. – 608 с.
54. Ш м о й л о в В.И., К и р и ч е н к о Г.А. Алгоритм суммирования расходящихся непрерывных дробей и некоторые его применения. ЖВМ и МФ, 2015. Том 55, № 4, с. 558-573.
55. Г у з и к В.Ф., Ш м о й л о в В.И., К и р и ч е н к о Г.А. Непрерывные дроби и их применение в вычислительной математике // Известие ЮФУ. Технические науки, 2014, №1. – С. 158-174.
56. Э й л е р Л. Введение в анализ бесконечных.– М.: Физматгиз, 1961, Т.1 Пер. Е. Л. Пацановского, вступ. статья А. Шпайзера; ред. И. Б. Погребысского.
57. Я н к е Е., Э м д е Ф., Л е ш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1968.– 344 с.
58. A i t k e n A.C. On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations. – Proc. Roy. Soc., Edinburgh, Ser. A, 46 (1925/26), 289-305.
59. B r e z i n s k i C. History of continued fraction and Pade approximants. – Springer – Verlag, Berlin, 1991. – 547 p.
60. C u y t A., P e t e r s e n V., V e r d o n k B., W a a d e l a n d H., J o n e s W. Handbook of Continued fractions for Special Funktion. – 2008, Springer – 431 p.
61. E u l e r L. De tractionibus continuis dissertatioa. – Comm. Acad. Petropol., t.9, (1737), 1744, P. 98-137.
62. E u l e r L. De tractionibus continuis observationes. – Comment. Acad. Petropol. t. 11(1739), 1750 P. 32-81.
63. Guzik V.F., Shmoylov V.I., Lyapunтова E.V., Kirichenko G.A. One of the approaches to the analysis of rapidly oscillating functions // Information and Communication Technologies for education, ICTE, Vol. 1, 2013. – P. 405-413.
64. H e n r i c i P. Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 2. Special Functions, Integral Transforms, Asymptotics and Continued Fractions. – New York: Wiley, 1977. – 662 p.
65. J o n e s W.B. and T h r o n W.I. Continued fractions: Analitic theory and applications. – Addison – Wesley, 1980, vol. 11, – 428 p.
66. L o r e n t z e n L., W a a d e l a n d H. Continued fraction with application.– Amsterdam-London-New-York-Tokyo.– 606 p.
67. M e l l i n H.I. Resolution de l'equation algebratique generale a l'aide de la fonction gamma. – C. R. Acad. Sci., Ser. I Math., vol. 172, 1921. P. 658-661..
68. P a d e H. Sur la representation approchée d'une fonction, par des fractions rationelles. – Ann. Sci., Ecole Normale Super. (3) 9(1892). P. 1-93.
69. P e r r o n O. Die Lehre von den Kettenbruchen.– Leipzig und Berlin, Teubner, 1913. – 520 p.
70. P e r r o n O. Die Lehre von den Kettenbruchen.– 2 ed, Leipzig und Berlin, 1929. – 524 p.

71. P e r r o n O s k a r. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Bd.1. Elementare Kettenbrüche.– Stuttgart, 3 te Aufl, B. G. Teubner Verlagsges, 1954, vi, – 194 pp.
72. P e r r o n O s k a r. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Dritte, verbesserte und erweiterte Aufl. Bd. II. Analytisch-funktionen-theoretische Kettenbrüche, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1957. – 316 pp.
73. R a m a n u j a n S. Collected papers.– New York, Chelsea, 1962.
74. R u t i s h a u s e r H e i n z. Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus. – Mitt. Inst. angew. Math. Eidgenoss. techn. Hochschule Zurich, 1957, №7. – 74 s.
75. S t i e l t j e s T.J. Recherches sur les fractions continues. – Annales de la Faculte des Sciences Toulouse, 1894, 8, p. 1– 122 ; 1895, 9. – P. 1-47.
76. T h r o n W.J. On parabolic convergence regions for continued fractions. – Math. Zeitschr., 1958, Bd 69, 173-182.
77. T h r o n W.J., W a a d e l a n d H. On a certain transformation of continued fractions. – Lect. Notes Math., 1982, 932, 225-240.
78. V a n V l e c k E.B. On the convergence of continued fractions with complex elements. – Trans. Amer. Math., Soc. 2(1901), 205-233.
79. V i s c o v a t o v V. Essai d'une méthode générale pour réduire toutes sortes de séries en fractions continues.– Nova Acta Acad. sci. Petropol., 1806, t.15. – P. 181-192.
80. W a a d e l a n d H. Linear approximations to continued fractions $K(z_n/1)$. – J. Comp. Appl. Math. – 1987. – 20. – 403-415.
81. W a l l H.S. Analitic theory of continued fraction. – NewYork, VanNostrand, 1948. – 433 p.
82. W a l l H u b e r t S t a n l e y. Analitic Theory of continued fractions.– Bronks., N. Y., Chelsen Publ., 1967, XIII. – 433 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	15
Глава 1. НАЧАЛА ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ	30
Обобщенные непрерывные дроби (30). Цепные дроби (33). Цепные дроби и дробно-линейные преобразования (36). Правильные цепные дроби и некоторые их применения (37). Некоторые формулы теории цепных дробей (39). Эквивалентные преобразования цепных дробей (42). Равноценные цепные дроби (43). Преобразования сжатия и растяжения цепных дробей (47). Алгоритмы вычисления значений непрерывных дробей (48). Некоторые классические теоремы о сходимости цепных дробей (57)	
Глава 2. АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ	60
Классификация непрерывных дробей (60). Формулы Хейлманна–Стилтьеса (63). Формулы Хлопонина (66). Рекуррентный алгоритм Хлопонина (67). Алгоритм Висковатова (68). Метод Никипорца (69). Рекуррентный алгоритм Рутисхаузера (73). Построение соответствующего ряда для цепной дроби (76)	
Глава 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ НЕПРЕРЫВНЫМИ ДРОБЯМИ	79
Построение равноценных цепных дробей для элементарных функций (79). Разложение показательной функции в цепные дроби (82). Разложение в цепную дробь $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{th}x$ (85). Разложение обратных тригонометрических и обратных гиперболических функций в цепные дроби (86). Разложение в цепную дробь логарифмической функции (88). Разложение в цепную дробь степенной функции (89). Разложение в цепные дроби функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh}x$ и $\operatorname{ch}x$ (93). Сравнительные характеристики способов вычисления элементарных функций при помощи цепных дробей и рядов (96). Разложение суммы бесконечной геометрической прогрессии в цепную дробь (98). Представление элементарных функций непрерывными дробями Хессенберга (100)	
Глава 4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НЕПРЕРЫВНЫМИ ДРОБЯМИ	102
Разложение гипергеометрического ряда в цепную дробь (102). Разложение в цепную дробь функции Куммера (104). Бета-функция и цепные дроби (108). Разложение функций Бесселя в цепные дроби (109). Разложение в цепную дробь гамма-функции (112)	
Глава 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ	116
О сходимости цепных дробей (116). Суммирование непрерывных дробей при помощи r/φ -алгоритма (116). Определение значений расходящихся цепных дробей (123). Определение модуля комплексного числа (130). Определение знака аргумента комплексного числа (135). Вариант алгоритма определения знака аргумента комплексного числа (141). Модификация r/φ -алгоритма (143)	
Глава 6. СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ	146
Суммирование рядов методом цепных дробей (146). Суммирование ряда Эйлера методом цепных дробей (153). Асимптотические цепные дроби (157)	

Глава 7. ЦЕПНЫЕ ДРОБИ РАМАНУДЖАНА	161
Общие формулы Рамануджана (162). О соотношениях аналогичных по структуре формул Рамануджана (166). Комплексная формула Рамануджана (167)	
Глава 8. О ПРЕДЕЛЕ ОТНОШЕНИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ	172
Представление отношений полиномов Чебышева цепными дробями (172). Инверсные целные дроби (181)	
Глава 9. ДЗЕТА-ФУНКЦИИ НИКИПОРЦА	187
Дзета-функции Римана (187). Дзета-функции Никипорца (188)	
Глава 10. РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ	200
Решение СЛАУ методом суммирования расходящихся рядов (200)	
Глава 11. РЕШЕНИЕ БЕСКОНЕЧНЫХ СЛАУ	208
Метод цепных дробей (207). Об одном подходе к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (211)	
Глава 12. ФУНКЦИИ НИКИПОРЦА И НАХОЖДЕНИЕ НУЛЕЙ	220
Функции Никипорца (219). Нахождение нулей полиномов при помощи г/ф-алгоритма (230). Первая схема алгоритма Никипорца – Рутисхаузера (235). Вторая схема алгоритма Никипорца – Рутисхаузера (239)	
Глава 13. ИЗ ИСТОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ	246
Непрерывные дроби Скоробогатко (244). Выпускник рабфака (260). Доцент провинциального вуза (270). Математик из княжеского рода (272)	
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	275
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	280
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	285
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ	289
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	292