



В. Б. Мнухин
Г. В. Куповых
Д. В. Тимошенко

Advanced Linear Algebra with Applications in Calculus

учебное пособие



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. Б. Мнухин
Г. В. Куповых
Д. В. Тимошенко

Advanced Linear Algebra with Applications in Calculus

Учебное пособие

Ростов-на-Дону – Таганрог
Издательство Южного федерального университета
2022

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73
М73

*Печатается по решению кафедры высшей математики Института компьютерных технологий и информационной безопасности
Южного федерального университета (протокол № 10 от 01 июня 2022 г.)*

Рецензенты:

зам. директора института математики и физики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, кандидат физико-математических наук *Л. В. Канукова*;
доцент кафедры высшей математики Института компьютерных технологий и информационной безопасности Южного федерального университета, кандидат физико-математических наук *А. Г. Клово*

Мнухин, В. Б.

М73 *Advanced Linear Algebra with Applications in Calculus* : учебное пособие / В. Б. Мнухин, Г. В. Куповых, Д. В. Тимошенко ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2022. – 162 с.
ISBN 978-5-9275-4208-6

Пособие предназначено для студентов направлений 01.03.02, 02.03.03, 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04, 10.03.01, 27.03.03, 09.05.01, 10.05.02, 10.05.03, 10.05.05, изучающих курс «Математика (Mathematics)» на английском языке. Оно является продолжением пособия Mnukhin, V.B., Kupovykh G.V., Timoshenko, D.V. *Linear Algebra*. / South Federal University.–2018. - 112 pp. ISBN: 978-5-9275-3088-5. Содержание обеих пособий полностью соответствует стандартному курсу линейной алгебры для нематематических специальностей. Пособие состоит из трёх глав, состоящих из разделов, разделенных на секции. Каждая из глав завершается рядом задач и упражнений, направленных на закрепление изученного материала.

ISBN 978-5-9275-4208-6

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73

© Южный федеральный университет, 2022
© Мнухин В. Б., Куповых Г. В., Тимошенко Д. В., 2022

Contents

1	Vector Spaces	5
1.1	Arithmetic Vector Space \mathbb{R}^n	7
1.1.1	Definition of n -vectors	7
1.1.2	Operations on n -vectors	8
1.2	Vector Spaces	10
1.2.1	Definition and examples of vector spaces	10
1.2.2	Subspaces of vector spaces	13
1.2.3	Linear independence and spanning sets	16
1.2.4	Basis and dimension	18
1.2.5	Linear dependence in \mathbb{R}^n	22
1.2.6	Basis in \mathbb{R}^n	26
1.3	Inner Product Spaces	28
1.3.1	Dot product in \mathbb{R}^n	28
1.3.2	Definition of inner product spaces	33
1.3.3	Orthonormal systems of vectors	38
1.3.4	Orthogonal projections	42
1.3.5	Gram-Schmidt orthonormalization process	46
1.4	Exercises for Chapter 1	52
2	Linear Transformations and Eigenvalues	57
2.1	Linear Transformations	58
2.1.1	Basic definitions and examples of transforms	58
2.1.2	Linear transformations and matrices	62
2.1.3	Examples of transformation matrices	65
2.1.4	Operations on transformations	69

2.1.5	Transformations and change of basis	76
2.1.6	The kernel and image of a linear transformation	78
2.1.7	Isomorphisms of vector spaces	84
2.2	Eigenvalues and Eigenvectors	88
2.2.1	Basic definitions and examples of eigenvalues	89
2.2.2	Finding eigenvalues and eigenspaces of a matrix	90
2.2.3	Eigenvalues of linear transformations	96
2.2.4	Diagonalization of linear transformations	98
2.2.5	Diagonalization of symmetric matrices	103
2.3	Exercises for Chapter 2	107
3	Applications in Calculus	112
3.1	Fourier Series	113
3.1.1	Approximations of functions	113
3.1.2	The Best Approximation theorem	116
3.1.3	Approximation by polynomials	118
3.1.4	Fourier approximations	120
3.2	Quadratic forms	126
3.2.1	Rotation of axes problem for conics	126
3.2.2	Quadratic forms on \mathbb{R}^2	128
3.2.3	Principal Axes Theorem	133
3.2.4	Sylvester's Criterion	137
3.2.5	Second-derivative test for multivariable functions	141
3.3	Linear Differential Equations	147
3.3.1	Basic definitions	147
3.3.2	Wronskian	148
3.3.3	Differential operator	151
3.3.4	General solutions of linear equations	153
3.4	Exercises for Chapter 3	158
	Reading List	159