

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

*Багров В.Г., Войцеховский А.В., Гаман В.И. (зам. гл. редактора),  
Дударев Е.Ф. (зам. гл. редактора), Ефимов Г.В., Жуковский В.Ч.,  
Звягин И.П., Кайгородов В.Р., Караваев Г.Ф., Коноров П.П.,  
Кортаев А.Д., Майер Г.В., Осипов А.И., Панин В.Е.,  
Петраковский Г.А., Портнова Т.С. (отв. секретарь),  
Потекаев А.И. (гл. редактор), Тихомиров В.В., Ушаков В.Я.*

**Вниманию читателей!**

Тел. редакции: **(382-2) 53-33-35**

Е-mail редакции: **physics@mail.tsu.ru**

Сведения о журнале можно найти на сайте в Интернете:  
<http://www.ntl.tomskinvest.ru>

Электронную версию Russian Physics Journal (перевод на английский язык журнала  
«Известия вузов. Физика») смотрите: [www.springer.com/11182](http://www.springer.com/11182); [www.springerlink.com/content/1573-9228](http://www.springerlink.com/content/1573-9228)

Старший редактор *Н. И. Шидловская*  
Верстка *Л. В. Пермякова*

---

Сдано в набор 17.11.2008 г. Подписано к печати 29.12.2008 г.  
Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Бум. книжно-журнальная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.  
Усл. п. л. 11,2. Усл. кр.-отг. 11,55. Уч.-изд. л. 12,5.  
Тираж 270 экз. Заказ № 15.

---

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пл. Ново-Соборная, 1, Сибирский физико-технический институт,  
редакция журнала «Известия высших учебных заведений. Физика», тел. 53-33-35

---

Отпечатано в типографии ЗАО «М-Принт», г. Томск, ул. Пролетарская, 38/1

СОДЕРЖАНИЕ

**Физика элементарных частиц и теория поля**

Ласуков В.В. Анизотропия реликтового скалярного поля.....	3
Обухов В.В., Осетрин К.Е., Филиппов А.Е., Рыбалов Ю.А. Задача Вайдя в конформно-плоских штеккелевых пространствах типа (1.1).....	12
Игнатъев Ю.Г., Эльмахи Н. Динамическая модель сферических возмущений во Вселенной Фридмана. III. Автомодельные решения.....	15
Буравов Л.И. Элементарные частицы мюон, пион и каон как резонаторы для квантов нейтрино. Расчет отношения масс $e$ , $\mu$ , $\pi^0$ , $\pi^\pm$ , $K^0$ , $K^\pm$ , $\nu_e$ .....	23
Полуэктов Ю.М. О теории возмущений для асимметричного ангармонического осциллятора.....	30
Малышевский В.С., Ольховский А.А. Корреляционные эффекты в черенковском излучении многозарядных ускоренных ионов.....	41
Котельников Г.А. О кинематике эффекта Черенкова с инвариантной скоростью света.....	47

**Физика полупроводников и диэлектриков**

Филиппов В.В. Распределение потенциала при зондовых измерениях в анизотропных полупроводниковых пленках.....	51
Глауберман М.А., Егоров В.В., Канищева Н.А., Козел В.В. О едином физическом и модельном представлении магниточувствительных свойств биполярных транзисторных структур.....	58

**Физика конденсированного состояния**

Еремеев С.В., Русина Г.Г., Борисова С.Д. Колебания линейных кластеров кобальта на ступенчатой поверхности меди.....	67
Панин А.В., Казаченок М.С., Почивалов Ю.И., Иванов Ю.Ф., Панина А.А. Влияние исходного структурного состояния армко-железа на эффект ультразвуковой обработки.....	74

**Физика магнитных явлений**

Гаврилюк А.А., Гаврилюк А.В., Гаврилюк Б.В., Семенов А.Л., Семиров А.В., Турик Н.В. Устойчивость магнитных доменов в аморфной металлической проволоке.....	83
--	----

**Краткие сообщения**

Смирнов А.И. Темная энергия в современной космологии.....	92
Клыков Н.А., Лазовская Л.М. О лабораторных опытах на диссипативных структурах.....	93
Певзнер М.Ш., Федоренко Л.В., Холод Д.В. О фазовом переходе по константе связи в КЭД <sub>3</sub> при наличии ультрафиолетового обрезания.....	95

УДК 530.12:531.51

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ\*, Н. ЭЛЬМАХИ\*\*

**ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ  
ВО ВСЕЛЕННОЙ ФРИДМАНА. III. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ**

Получен и исследован класс точных сферически-симметричных запаздывающих автомодельных решений линеаризованных вокруг фридмановского фона уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости с произвольным показателем баротропы.

*Ключевые слова:* теория гравитации, космология, теория сферических возмущений, задача с граничными условиями.

**Введение**

В предыдущих работах авторов [1, 2] был получен класс точных запаздывающих решений для линейных сферических возмущений Вселенной Фридмана с ультрарелятивистским уравнением состояния заполняющей его идеальной жидкости, соответствующих наличию центрального сингулярного источника и имеющих вид полиномов по радиальной переменной. При этом было отмечено, что при нулевых граничных условиях на звуковом горизонте для возмущений метрики класса  $C^1$  возмущения плотности энергии имеют разрыв первого рода на звуковом горизонте. В этой работе мы более подробно исследуем запаздывающие решения, расширяя область исследований на уравнения состояния жидкости с произвольным коэффициентом баротропы  $\kappa$ .

Итак, будем исследовать запаздывающие решения эволюционного уравнения для сферических возмущений (см. [1] (84))

$$\ddot{\Psi} + \frac{2}{\eta} \dot{\Psi} - \frac{6(1+\kappa)}{(1+3\kappa)^2} \frac{\Psi}{\eta^2} - \kappa \Psi'' = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями на звуковом горизонте, соответствующими нулевым значениям возмущений метрики и ее первых радиальных производных:

$$\Sigma_0 : r = \sqrt{\kappa\eta}; \tag{2}$$

$$\Psi(r, \eta)|_{r=\sqrt{\kappa\eta}} = \mu(\eta); \quad \Psi'(r, \eta)|_{r=\sqrt{\kappa\eta}} = 0, \tag{3}$$

где  $\mu(\eta)$  – масса сингулярного центрального источника, так что возмущение компоненты метрики  $g_{44}$  равно

$$\delta g_{44} = a^2(\eta)\delta v, \quad \delta v = 2 \frac{\Phi(r, \eta)}{ar} = 2 \frac{\Psi(r, \eta) - \mu(\eta)}{ar}, \tag{4}$$

причем несингулярной части потенциала соответствует функция  $\Psi(r, \eta)$ , такая, что

$$\Psi(0, \eta) = 0. \tag{5}$$

Временная эволюция массы описывается уравнением

$$\ddot{\mu} + \frac{2}{\eta} \dot{\mu} - \frac{6(1+\kappa)}{(1+3\kappa)^2} \frac{\mu}{\eta^2} = 0, \tag{6}$$

имеющим следующее решение:

$$\mu = \mu_+ \eta^{\frac{2}{1+3\kappa}} + \mu_- \eta^{\frac{3(1+\kappa)}{1+3\kappa}}, \quad (1+\kappa) \neq 0 \tag{7}$$

(остальные подробности см. в предыдущих работах [1, 2].

Потенциальная функция  $\Psi(r, \eta)$  и скаляр  $\mu(\eta)$  полностью определяют возмущения плотности энергии и скорость жидкости:

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{4\pi r a^3 \varepsilon_0} \left( 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} - \Psi'' \right); \quad (8)$$

$$(1 + \kappa)v = -\frac{1}{4\pi r a^3 \varepsilon_0} \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial r r}, \quad (9)$$

где  $\varepsilon_0(\eta)$  – невозмущенная плотность энергии фридмановской Вселенной:

$$\varepsilon_0 \sim \eta^{\frac{6(1+\kappa)}{1+3\kappa}}; \quad a \sim \eta^{\frac{2}{1+3\kappa}}; \quad \varepsilon_0 a^3 \sim \eta^{\frac{6\kappa}{1+3\kappa}}. \quad (10)$$

## 1. Автомоделные решения

### 1.1. Общее автомоделное решение

Итак, будем искать решения эволюционных уравнений для возмущений с нулевыми граничными условиями на нулевом звуковом горизонте (2). Полагая в (1)

$$\Psi(r, \eta) = \eta^\alpha G_\alpha(z), \quad (11)$$

где

$$z = \frac{r}{\sqrt{\kappa\eta}}, \quad (12)$$

придем к классу *автомоделных решений* и получим обыкновенные дифференциальные уравнения на функции  $G_\alpha(z)$ :

$$(1 - z^2)G''_\alpha(z) + 2\alpha z G'_\alpha(z) + \left[ \frac{6(1 + \kappa)}{(1 + 3\kappa)^2} - \alpha(1 + \alpha) \right] G_\alpha(z) = 0. \quad (13)$$

Потенциальная функция  $\Psi(r, \eta)$  должна являться комбинацией частных решений:

$$\Psi(r, \eta) = \sum_\alpha \eta^\alpha G_\alpha(z). \quad (14)$$

Из (3) и (7) следует, что при  $\alpha \neq 0$  эта комбинация может содержать лишь два члена:

$$\Psi(r, \eta) = G_+(z)\eta^{\frac{2}{1+3\kappa}} + G_-(z)\eta^{\frac{3(1+\kappa)}{1+3\kappa}}, \quad (15)$$

причем вследствие граничных условий (3) функции  $G_\pm(z)$  должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$G_\pm(1) = \mu_\pm; \quad G'_\pm(1) = 0. \quad (16)$$

В частности, из (3) и (8) сразу следует, что в случае  $\alpha = 0$  указанному классу решений отвечает нулевая масса сингулярного источника.

При произвольных значениях параметра  $\alpha$  общее решение линейного дифференциального уравнения (13) выражается через функции Лежандра,  $P_\nu^\mu(z)$ , и присоединенные функции Лежандра,  $Q_\nu^\mu$ <sup>1</sup>:

$$G(z) = \left( \frac{1-z}{1+z} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \left[ C_1 P_{\frac{3(1-\kappa)}{2(1+\kappa)}}^{\alpha+1}(z) + C_2 Q_{\frac{3(1-\kappa)}{2(1+\kappa)}}^{\alpha+1}(z) \right]. \quad (17)$$

### 1.2. Автомоделное решение с частицеподобным источником ( $\mu \neq 0$ )

Все сказанное выше справедливо для формального общего решения (17) при произвольном значении параметра  $\alpha$ . Однако в нашем конкретном случае (15) значения параметра  $\alpha$

$$\alpha = \left( \frac{2}{1+3\kappa}, -\frac{3(1+\kappa)}{1+3\kappa} \right) \quad (18)$$

<sup>1</sup> См., например, [7, 8].

являются одновременно корнями квадратного уравнения:

$$\frac{6(1+\kappa)}{(1+3\kappa)^2} - \alpha(1+\alpha) = 0. \quad (19)$$

Поэтому в этом случае уравнение (13) вырождается в более простое

$$(1-z^2)G''_{\alpha}(z) + 2\alpha zG'_{\alpha}(z) = 0, \quad (20)$$

однократно интегрируя которое, получим

$$G'_{\alpha}(z) = C_1(1-z^2)^{\alpha}. \quad (21)$$

Сравнивая второе граничное условие (16) с выражением (21), мы видим, что для выполнения нулевых условий на первую производную потенциала на нулевом звуковом горизонте необходимо, чтобы  $\alpha > 0$ , т.е. чтобы масса частицеподобного источника возрастала со временем и была равна нулю в момент времени  $\eta = 0$ . Таким образом, для обеспечения гладкой сшивки решения с фридмановским на нулевом звуковом горизонте необходимо, чтобы

$$\mu_- = 0. \quad (22)$$

В случае же  $\alpha > 0$  вследствие соотношения (21) второе граничное условие (16) автоматически выполняется при выполнении первого. Таким образом, выполнение условия  $\alpha > 0$  обеспечивает гладкую сшивку решения в классе  $C^1$  на звуковом горизонте.

Интегрируя теперь формально уравнение (21) с учетом условия в начале координат (5), согласно которому

$$G(0) = 0, \quad (23)$$

найдем его формальное решение на всем интервале значений  $r = [0, +\infty)$ :

$$G(\kappa, z) = C_1 \left\{ zF\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{1+3\kappa}, \frac{3}{2}, z^2\right), (z \leq 1); \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{2}{1+3\kappa} + 1\right)}{2\Gamma\left(\frac{2}{1+3\kappa} + \frac{3}{2}\right)} + \int_0^{\ln(z+\sqrt{z^2-1})} \frac{4}{1+3\kappa} x dx, (z > 1), \right. \quad (24)$$

где  $F(a, b, c, x)$  – гипергеометрическая функция (см., например, [7])

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha}, \quad \Re(\gamma) > \Re(\beta) > 0; |\arg(1-z)| < \pi. \quad (25)$$

При этом справедливо полезное предельное соотношение [7]

$$\lim_{z \rightarrow 1-0} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, \quad \Re(\gamma-\alpha-\beta) > 0, \quad (26)$$

где  $\Gamma(x)$  –  $\Gamma$ -функция. На рис. 1 показаны решения (24) для ряда значений коэффициента баротропы.

На основе полученного решения (24) можно легко убедиться, что  $G(-z) = G(z)$ , т.е. функция  $\Psi(r, \eta)$  действительно является нечетной функцией радиальной переменной, что было показано в [2]. Учитывая первое граничное условие (16), найдем постоянную  $C_1$ :

$$C_1 = \mu_+ \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{1+3\kappa} + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{2}{1+3\kappa} + 1\right)}, \quad (27)$$

и, таким образом, получим окончательно автомодельное решение класса  $C^1$ , удовлетворяющее нулевым граничным условиям на нулевом звуковом горизонте:

$$\Psi(r, \eta, \kappa) = \mu_+ \eta^{\frac{2}{1+3\kappa}} \left\{ \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{1+3\kappa} + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{2}{1+3\kappa} + 1\right)} \frac{r}{\sqrt{\kappa\eta}} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{1+3\kappa}, \frac{3}{2}, \frac{r^2}{\kappa\eta^2}\right), (r \leq \sqrt{\kappa\eta}); 1, (r > \sqrt{\kappa\eta}). \right. \quad (28)$$

Учитывая соотношение (28), получим, согласно (4), скалярную функцию возмущения метрики,  $\delta v$ :

$$\delta v(r, \eta) = -\frac{2\mu_+}{r} \left[ 1 - \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{1+3\kappa} + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{2}{1+3\kappa} + 1\right)} \frac{r}{\sqrt{\kappa\eta}} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{1+3\kappa}, \frac{3}{2}, \frac{r^2}{\kappa\eta^2}\right) \right] \chi(\sqrt{\kappa\eta} - r), \quad (2)$$

где  $\chi(x)$  – функция Хевисайда:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (3)$$

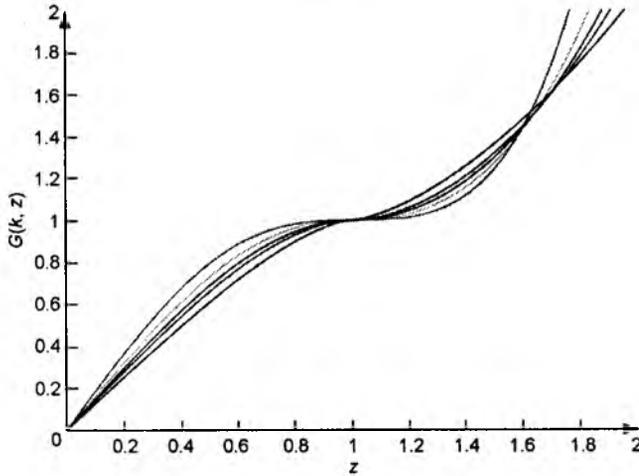


Рис. 1. Нормированная функция  $G(k, z)$ , вычисленная по формуле (24) при значении (27) постоянной  $C_1$  и  $\mu=1$ . В левой части рисунка снизу вверх:

$$\kappa = 0; \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1$$

В ряде частных значений коэффициента баротропы  $\kappa$  полученное решение выражается в элементарных функциях: для  $\kappa = 1/3$  (ультрарелятивистская жидкость)

$$G(1/3, z) = z - \frac{1}{3}z^3;$$

$$\Psi = \frac{3}{2}\mu_+\eta\left(z - \frac{1}{3}z^3\right); \quad \delta v = -\frac{2\mu_+}{r} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{r}{\sqrt{3\eta}} + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{\sqrt{3\eta}} \right)^3 \right]. \quad (4)$$

Решение (31), являясь автомодельным, совпадает с общим решением в виде степенного ряда ранее полученным в работах [3–6], что лишний раз подтверждает правильность доказанной в теореме о единственности запаздывающего решения в случае ультрарелятивистского уравнения состояния: для  $\kappa = 1$  (жидкость с предельно жестким уравнением состояния)

$$G(1, z) = \frac{1}{2}z\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}\arcsin z;$$

$$\Psi = \frac{2\mu_+}{\pi} \sqrt{\eta} \left[ \frac{r}{\eta} \sqrt{1 - \frac{r^2}{\eta^2}} + 2 \arcsin \frac{r}{\eta} \right]; \quad \delta v = -\frac{2\mu_+}{r} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \left( \frac{r}{\eta} \sqrt{1 - \frac{r^2}{\eta^2}} + \arcsin \frac{r}{\eta} \right) \right]. \quad (5)$$

Заметим, что обращение первой производной по радиальной переменной на нулевом звуковом горизонте в полученных решениях при  $\alpha > 0$  гарантирует соотношение (21).

### 1.3. Решение без частицеподобного источника

Полагая теперь в (11)  $\alpha = 0$ , получим вместо (13) уравнение

$$(1-z^2)G''(z) + \frac{6(1+\kappa)}{(1+3\kappa)^2}G(z) = 0. \quad (6)$$

Общим решением этого уравнения является линейная комбинация гипергеометрических функций

$$G(\kappa, z) = (1 - z^2) \left[ z C_1 F \left( \frac{3\kappa}{1+3\kappa}, \frac{5+9\kappa}{2+6\kappa}, \frac{3}{2}, z^2 \right) + C_2 F \left( \frac{2+3\kappa}{1+3\kappa}, \frac{3\kappa-1}{2+6\kappa}, \frac{1}{2}, z^2 \right) \right]. \quad (34)$$

Если бы гипергеометрические функции

$$F \left( \frac{3\kappa}{1+3\kappa}, \frac{5+9\kappa}{2+6\kappa}, \frac{3}{2}, z^2 \right) \quad \text{и} \quad F \left( \frac{2+3\kappa}{1+3\kappa}, \frac{3\kappa-1}{2+6\kappa}, \frac{1}{2}, z^2 \right)$$

оставались конечными на звуковом горизонте  $z=1$ , то общее решение (33) автоматически обращалось бы в нуль на звуковом горизонте, тогда нулевые граничные условия на звуковом горизонте (16) можно было бы, в принципе, удовлетворить выбором констант в общем решении (33). Однако указанные гипергеометрические функции имеют особенности на звуковом горизонте.

Действительно, как нетрудно видеть, параметры  $\alpha, \beta, \gamma$  гипергеометрических функций этой линейной комбинации (см. определение гипергеометрической функции (26)) удовлетворяют условию

$$\alpha + \beta - \gamma = 1, \quad (35)$$

причем для первого члена этой комбинации выполняется дополнительное условие

$$\gamma_1 - \beta_1 = -\frac{1}{1+3\kappa}, \quad (36)$$

в то время, как для второго

$$\gamma_2 - \beta_2 = +\frac{1}{1+3\kappa}. \quad (37)$$

В этом случае необходимо использовать функциональное соотношение для гипергеометрической функции [7], которое применительно к (35) дается формулой

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - 1, z) = \frac{1}{(1-z)} F(\alpha - 1, \beta - 1, \alpha + \beta - 1). \quad (38)$$

Используя это соотношение в формуле (34), перепишем общее решение в виде

$$G(\kappa, z) = (1+z) \left[ z C_1 F \left( -\frac{1}{1+3\kappa}, \frac{3(1+\kappa)}{2(1+3\kappa)}, \frac{1}{2}, z^2 \right) + C_2 F \left( \frac{1}{1+3\kappa}, \frac{3(1+\kappa)}{2(1+3\kappa)}, -\frac{1}{2}, z^2 \right) \right]. \quad (39)$$

Вычисляя значения гипергеометрических функций в правой части (39) на звуковом горизонте, получим, что и эти функции имеют особенности на звуковом горизонте. Поэтому единственным автомодельным решением, удовлетворяющим нулевым граничным условиям на звуковом горизонте, в рассматриваемом случае является лишь тривиальное решение:  $C_1 = C_2 = 0$ .

Подводя итоги этому подразделу, сформулируем теорему:

**Теорема.** *Не существует запаздывающих сферически-симметричных автомодельных решений уравнения (1), удовлетворяющих нулевым граничным условиям (16) на звуковом горизонте, без центрального частицеподобного источника ( $\mu = 0$ ).*

Доказанная теорема в некотором смысле аналогична теореме об аналитическом решении уравнения Лапласа в случае сферической симметрии.

## 2. Исследование автомодельных решений

### 2.1. Производные потенциальных функций

Перейдем к анализу полученных автомодельных решений в случае наличия частицеподобного источника. Для этого воспользуемся выражениями (8) для относительной плотности энергии возмущения и (9) – для радиальной скорости среды в возмущении. При этом нам понадобятся выражения для первых и вторых производных потенциальных функций. Учитывая определения (11), (12) и соотношения (20), (21), (27), получим выражения для первых и вторых радиальных производных потенциальной функции  $\Psi(r, \eta)$ :

$$\Psi', (r, \eta) = \mu_+ \eta^{\frac{1-3\kappa}{1+3\kappa}} \frac{2\Gamma \left( -\frac{2}{1+3\kappa} + \frac{3}{2} \right)}{\sqrt{\kappa\pi} \Gamma \left( -\frac{2}{1+3\kappa} + 1 \right)} (1 - z^2)^{\frac{2}{1+3\kappa}}; \quad (40)$$

$$\Psi''_{rr}(r, \eta) = -\frac{8\mu_+ \eta^{-\frac{6\kappa}{1+3\kappa}}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{1+3\kappa} + \frac{3}{2}\right)}{\kappa(1+3\kappa)\Gamma\left(\frac{2}{1+3\kappa} + 1\right)} (1-z^2)^{\frac{1-3\kappa}{1+3\kappa}}, \quad (41)$$

а также для временной производной функции  $\Phi(r, \eta)$ :

$$\dot{\Phi}(r, \eta) = \eta^{\frac{1-3\kappa}{1+3\kappa}} \left[ 2 \frac{G(k, z) - \mu_+}{1+3\kappa} - \frac{2\mu_+ \Gamma\left(\frac{2}{1+3\kappa} + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{2}{1+3\kappa} + 1\right)} z(1-z^2)^{\frac{2}{1+3\kappa}} \right], \quad (42)$$

где функция  $G(\kappa, z)$  определяется соотношением (24) с константой  $C_1$  из (27).

Из приведенных выражений следует, что при  $\kappa > -1/3$  первые радиальные и временные производные потенциальных функций  $\Psi(r, \eta)$  и  $\Phi(r, \eta)$  обращаются в нуль на звуковом горизонте:

$$\frac{\partial}{\partial r} \Psi(r, \eta) \Big|_{r=\sqrt{k}\eta} = \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, \eta) \Big|_{r=\sqrt{k}\eta} = 0; \quad (1+3\kappa \geq 0); \quad (43)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \Psi(r, \eta) \Big|_{r=\sqrt{k}\eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi(r, \eta) \Big|_{r=\sqrt{k}\eta} = 0; \quad (1+3\kappa \geq 0). \quad (44)$$

При  $\kappa < 1/3$  вторые радиальные производные потенциальных функций обращаются в нуль на звуковом горизонте:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \Psi(r, \eta) \Big|_{r=\sqrt{k}\eta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi(r, \eta) \Big|_{r=\sqrt{k}\eta} = 0; \quad (1-3\kappa \geq 0). \quad (45)$$

При  $\kappa = 1/3$  вторые радиальные производные потенциальных функций имеют разрыв первого рода на звуковом горизонте. При  $\kappa > 1/3$  вторые радиальные производные потенциальных функций имеют разрыв второго рода на звуковом горизонте.

## 2.2. Эволюция распределения плотности энергии в сферическом возмущении

Вычисляя относительную плотность энергии возмущения по формуле (8) с учетом соотношений (10) и (40), (41), получим окончательно

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{z\eta\pi\sqrt{\kappa}(1+3\kappa)} \left[ 3 \frac{G(k, z) - \mu_+}{1+3\kappa} - 3 \frac{\mu_+ \Gamma\left(\frac{7+9\kappa}{2(1+3\kappa)}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3(1+\kappa)}{1+3\kappa} + 1\right)} z(1-z^2)^{\frac{2}{1+3\kappa}} + \right. \\ \left. + \frac{2\mu_+ \Gamma\left(\frac{7+9\kappa}{2(1+3\kappa)}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3(1+\kappa)}{1+3\kappa} + 1\right)} (1-z^2)^{\frac{1-3\kappa}{1+3\kappa}} \right] \chi(1-z) = \frac{\mu_+}{\eta} \Delta(z) \chi(1-z), \quad (46)$$

где введена приведенная относительная плотность энергии возмущения  $\Delta(z)$ . Можно строго показать, что  $\Delta(z) \geq 0$ .

Из этого выражения видно, что с течением времени форма профиля плотности энергии возмущения относительно безразмерной радиальной переменной  $z = r/\sqrt{k}\eta$  не изменяется, а сама относительная плотность энергии возмущения падает обратно пропорционально временной переменной  $\eta$  (рис. 2).

При этом в терминах обычной радиальной переменной  $r$  профиль возмущения плотности энергии деформируется. В качестве примера на рис. 3 показана эволюция профиля возмущения относительной плотности энергии при показателе баротропы  $\kappa = 1/6$ . Далее из формулы (46) непосредственно видно, что при  $\kappa < 1/3$  возмущение плотности энергии на звуковом горизонте исче-

зает, при  $\kappa = 1/3$  имеет на звуковом горизонте конечный скачок, а при  $\kappa > 1/3$  – бесконечный скачок – в полном соответствии с поведением вторых радиальных производных потенциальных функций.

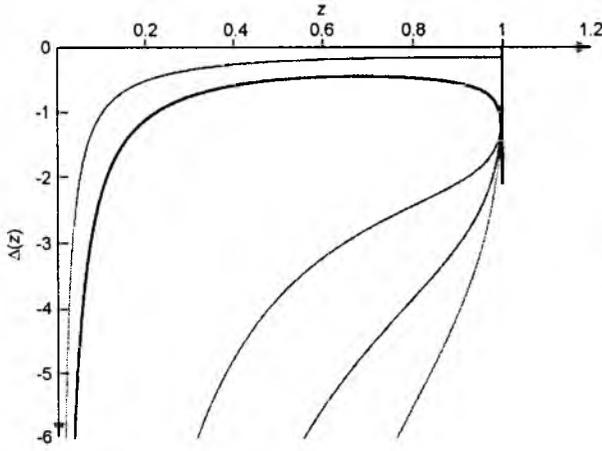


Рис. 2. Приведенная относительная плотность энергии возмущения  $\Delta(z)$ , вычисленная по формуле (45), как функция  $z$ . Снизу вверх тонкими линиями:  $\kappa = 1/6; 1/5; 1/4; 1/3$ ; жирная линия соответствует  $\kappa = 1/2$

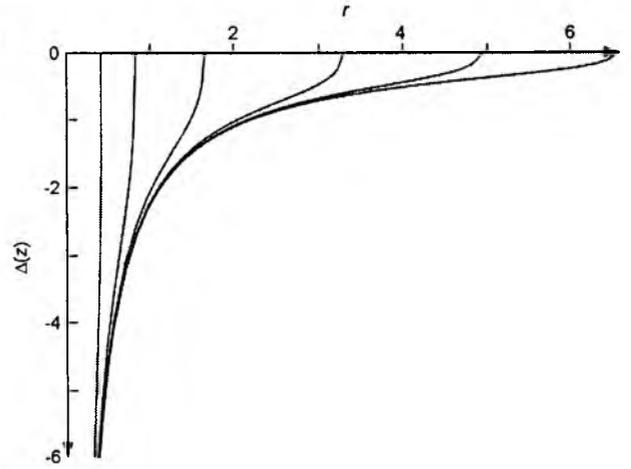


Рис. 3. Эволюция приведенной относительной плотности энергии  $\Delta(z)$ , вычисленная по формуле (45), как функция  $r$  при  $\kappa = 1/6$ . Слева направо:  $\eta = 1; 2; 4; 8; 12; 16$

Выясним физический смысл полученного решения. Возмущение энергии, соответствующее несингулярной части потенциальной функции, описывается формулой

$$\delta E = 4\pi a^3 \int_0^{\sqrt{\kappa\eta}} \delta \epsilon r^2 dr.$$

С учетом (10) получим отсюда

$$\delta E = 4\pi\eta^{-\frac{6\kappa}{1+3\kappa}} \int_0^{\sqrt{\kappa\eta}} \frac{\delta \epsilon}{\epsilon_0} r^2 dr.$$

Переходя в интеграле к безразмерной переменной  $z$  по формуле

$$r = \sqrt{\kappa\eta}z,$$

приведем его к виду

$$\delta E = 4\pi\mu_+ \eta^{\frac{2}{1+3\kappa}} \kappa^{3/2} \int_0^1 \Delta(z) dz \sim -m(\eta), \tag{47}$$

где (см. (7))

$$m(\eta) = \mu_+ \eta^{\frac{2}{1+3\kappa}} \tag{48}$$

– масса центрального сингулярного частицеподобного источника. Таким образом, полная энергия, заключенная в несингулярной моде возмущения, отрицательна и пропорциональна массе частицеподобного источника.

### 2.3. Эволюция радиальной скорости жидкости в сферическом возмущении

Выполняя аналогичные вычисления, получим из (9) выражение для радиальной скорости возмущения:

$$v = \frac{3}{8\pi\eta^2 \kappa^{3/2} (1+3\kappa)} \left[ \frac{G(k, z) - \mu_+}{z^3} - \dots \right]$$

$$\left[ -\frac{\mu_+ \Gamma\left(\frac{7+9\kappa}{2(1+3\kappa)}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3(1+\kappa)}{1+3\kappa} + 1\right)} \frac{(1-z^2)^{\frac{2}{1+3\kappa}}}{z} - 4 \frac{\mu_+ \Gamma\left(\frac{7+9\kappa}{2(1+3\kappa)}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3(1+\kappa)}{1+3\kappa} + 1\right)} (1-z^2)^{\frac{1-3\kappa}{1+3\kappa}} \right] = \frac{1}{\eta^2} \Upsilon(z). \quad (49)$$

Из этого выражения также видно, что радиальная скорость отрицательна и ее профиль остается постоянным в масштабе  $z$ , а абсолютная величина скорости падает обратно пропорционально  $\eta^2$  (рис. 4).

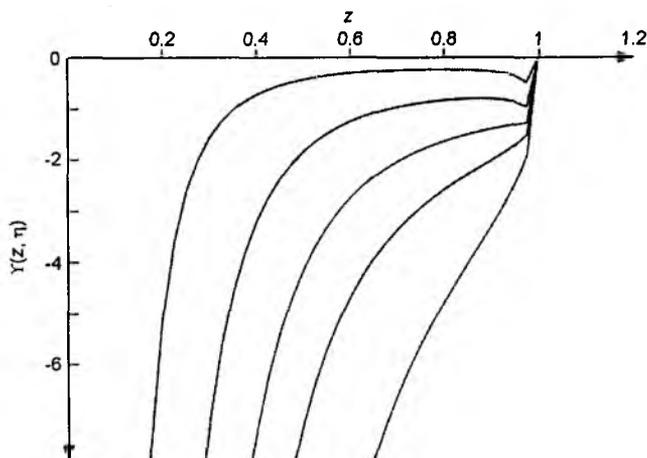


Рис. 4. Зависимость профиля радиальной скорости возмущения  $\Upsilon(z)$  от коэффициента баротропии при  $\kappa = 1/6$ . Снизу вверх:  $\kappa = 1/6; 1/4; 1/3; 1/2; 1$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатьев Ю.Г., Эльмахи Н. // Изв. вузов. Физика. – 2008. – № 1. – С. 66–76.
2. Игнатьев Ю.Г., Эльмахи Н. // Изв. вузов. Физика. – 2008. – № 7. – С. 70–77.
3. Игнатьев Ю.Г., Попов А.А. // Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной. – Казань: Изд-во КГПИ, 1988. – С. 5–16.
4. Игнатьев Ю.Г., Попов А.А. // Изв. вузов. Физика. – 1989. – № 5. – С. 82–87.
5. Ignat'ev Yu.G. and Popov A.A. // Astrophysics and Space Science. – 1990. – V. 163. – P. 153–174.
6. Ignat'ev Yu.G., Popov A.A. // Phys. Lett. A. – 1996. – V. 220. – P. 22–29.
7. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: ГИФМЛ, 1963.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986.

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет,  
г. Казань, Россия

E-mail: \*ignatev-yurii@mail.ru

\*\*Nourdino@yahoo.com

Поступила в редакцию 28.01.08.