

# ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА

ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД

МОСКВА

ТОМ 142, ВЫПУСК 2 (8)

АВГУСТ 2012

«НАУКА»

ЖУРНАЛ ИЗДАЕТСЯ ПОД РУКОВОДСТВОМ ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК Р.

## СОДЕРЖАНИЕ

### АТОМЫ, МОЛЕКУЛЫ, ОПТИКА

- Экстремально большое пропускание света нанодоверстием внутри фотонного кристалла ..... Мелентьев П. Н.,  
Афанасьев А. Е., Кузин А. А., Заблоцкий А. В., Батулин А. С., Балыкин В. И. 211
- Концепция эффективного потенциала для описания движения ионов в квадрупольном фильтре масс  
..... Судаков М. Ю., Апацкая М. В. 222
- Динамика электрона в лазерных полях релятивистской интенсивности с учетом торможения излу-  
чением ..... Галкин А. Л. 230

### ЯДРА, ЧАСТИЦЫ, ПОЛЯ, ГРАВИТАЦИЯ И АСТРОФИЗИКА

- Общий класс вакуумных сферически-симметричных решений уравнений общей теории относитель-  
ности ..... Карбановский В. В., Сорокин О. М., Нестеро-  
ва М. И., Болотняя В. А., Марков В. Н., Каиров Т. В., Ляш А. А., Тарасюк О. Р. 238
- Radiative corrections to polarization observables in elastic electron–deuteron scattering in leptonic variables  
..... Gakh G. I., Konchatnij M. I., Merenkov N. P. 242

### ТВЕРДЫЕ ТЕЛА И ЖИДКОСТИ

- Упругие постоянные твердых тел при высоких давлениях ..... Красильников О. М., Векилов Ю. Х., Мосягин И. Ю. 266
- Аналитическая модель хрупкого разрушения на основе гипотезы масштабного подобию ..... Аракчеев А. С., Лотов К. В. 271
- Спиновые волны в ультрахолодных газах с обменным и спин-орбитальным взаимодействиями ....  
..... Андреева Т. Л., Рубин П. Л. 279

**ПОРЯДОК, БЕСПОРЯДОК И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ  
В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ**

Теоретический анализ двухщелевой сверхпроводимости диборидов магния и пниктидов железа в обобщенной $\alpha$ -модели .....	<b>Максимов Е. Г.</b>	
<b>Каракозов А. Е., Горшунов Б. П., Пономарев Я. Г., Жукова Е. С., Дрессел М.</b>		282
Симметризация кулоновского спаривающего потенциала электрон-фононным взаимодействием .....		
..... <b>Белявский В. И., Капаев В. В., Копаев Ю. В., Михаилян Д. И.</b>		294
О механизме поглощения электромагнитных волн сверхвысокочастотного диапазона в сверхтекучем гелии .....		
..... <b>Пашицкий Э. А., Пентегов В. И.</b>		305
Задача Капицы для магнитных моментов синтетических антиферромагнитных систем .....		
..... <b>Джежеря Ю. И., Демишев К. О., Коренивский В. Н.</b>		318
Диффузионный ток в системе связанных джозефсоновских переходов .....		
..... <b>Шукринов Ю. М., Рахмонов И. Р.</b>		323
Фазовые переходы и критические свойства фрустрированной модели Гейзенберга на слоистой треугольной решетке с взаимодействиями следующих за ближайшими соседями .....		
..... <b>Муртазаев А. К., Рамазанов М. К., Бадиев М. К.</b>		338
Особенности корреляционных функций смещений ионов в $\text{BaTiO}_3$ . Расчет рассеяния рентгеновских лучей и нейтронов .....		
..... <b>Мацко Н. Л., Максимов Е. Г., Лепешкин С. В.</b>		345
Влияние температуры на фононный вклад в функцию Грина высокотемпературных сверхпроводящих купратов .....		
..... <b>Корнеева Л. А., Мазур Е. А.</b>		358

**ЭЛЕКТРОННЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

Сравнение квантовомеханического и полуклассического подходов для анализа спиновой динамики в квантовых точках .....		
..... <b>Петров М. Ю., Яковлев С. В.</b>		363

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ, НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЗИКА,  
ФИЗИКА «МЯГКОЙ МАТЕРИИ»**

Моделирование эффекта когерентного обратного рассеяния света в нематических жидких кристаллах .....		
..... <b>Аксенова Е. В., Кокорин Д. И., Романов В. П.</b>		376
Эффект маятника Капицы в проточном реакторе .....		
..... <b>Ваганова Н. И., Руманов Э. Н.</b>		386
Моделирование влияния высокочастотного (2 МГц) емкостного газового разряда и магнитного поля на плазменный слой у поверхности в гиперзвуковом потоке газа .....		
..... <b>Швейгерт И. В.</b>		390
Hyperbolification of dynamical systems: the case of continuous-time systems <b>Elhadj Z., Sprott J. C.</b>		397
Электроконвекция при наличии автономной униполярной инжекции и остаточной проводимости .....		
..... <b>Тараут А. В., Смородин Б. Л.</b>		403

# ОБЩИЙ КЛАСС ВАКУУМНЫХ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*В. В. Карбановский\**, *О. М. Сорокин*, *М. И. Нестерова*, *В. А. Болотняя*,  
*В. Н. Марков\*\**, *Т. В. Каиров*, *А. А. Ляш*, *О. Р. Тарасюк*

*Мурманский государственный педагогический университет  
183720, Мурманск, Россия*

Поступила в редакцию 7 сентября 2010 г.  
после переработки 15 февраля 2012 г.

Рассмотрена система сферически-симметричных вакуумных уравнений общей теории относительности. Получено общее решение, представленное двумя классами метрик с произвольными функциями  $g_{00}$  и  $g_{22}$ . Проанализированы свойства найденных решений.

Известно (см. [1]), что общий класс статических сферически-симметричных решений вакуумных уравнений общей теории относительности (ОТО) определяется выражением (скорость света  $c = 1$ )

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{x}\right) dt^2 + 2a dt dr + (x'^2 - a^2) \left(1 - \frac{r_g}{x}\right)^{-1} dr^2 + x^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

где  $r_g$  — гравитационный радиус объекта, штрих означает дифференцирование по  $r$ , а функции  $x(r)$  и  $a(r)$  являются произвольными.

При  $a = 0$  и  $x = r$  метрика (1) сводится к решению Шварцшильда. При выборе условий  $a = 1$ ,  $x = r$  выражение (1) соответствует метрике Эддингтона–Финкельштейна [2, 3]. Очевидно, однако, что для полного «покрытия» пространства-времени метрикой (1) должно быть выполнено требование  $x(0) = 0$  (за исключением случая пространства-времени, содержащего «дефекты», например, вакуумные червоточины Морриса–Торна [4]). В результате неизбежно присутствие ненулевой точки  $\tilde{r}$ , для которой  $x(\tilde{r}) = r_g$ . Таким образом, существует проблема горизонта событий. Ее известные «решения» [5, 6] фактически сводятся к переносу «истинного начала» координат  $r = 0$  в точку  $r = r_g$ . Следовательно, они не могут в полной мере описать простран-

ство-время. Поэтому интересно рассмотреть вакуумные уравнения ОТО для общей нестатической сферически-симметричной метрики:

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + 2a dt dr + e^\lambda dr^2 + e^\gamma d\Omega^2, \quad (2)$$

где  $a$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$ ,  $\nu$  — функции от  $t$  и  $r$ .

Система вакуумных уравнений ОТО для метрики (2) имеет вид (точка обозначает дифференцирование по  $t$ )

$$G_0^0 = \frac{1}{4(e^{\nu+\lambda} + a^2)^2} (-e^{\nu+2\lambda}\dot{\gamma}^2 - 2e^{\nu+2\lambda}\dot{\gamma}\dot{\lambda} + 3e^{2\nu+\lambda}\gamma'^2 + 4e^{2\nu+\lambda}\gamma'' - 2e^{2\nu+\lambda}\gamma'\lambda' + 4e^{\nu+\lambda}\gamma'\dot{\gamma}a + 4e^{\nu+\lambda}a\dot{\gamma}' + 4e^{\nu+\lambda}a'\dot{\gamma} - 2e^{\nu+\lambda}a\dot{\gamma}\nu' - 2e^{\nu+\lambda}a\dot{\gamma}\lambda' - 2e^\lambda a^2 \dot{\lambda}\dot{\gamma} - e^\lambda a^2 \dot{\gamma}^2 + 3e^\nu a^2 \gamma'^2 + 2e^\nu a^2 \gamma'\nu' + 4e^\nu a^2 \gamma'' - 4e^\nu a a'\gamma' + 4a^3(\dot{\gamma}\gamma' + \dot{\gamma}')) - e^{-\gamma} = 0, \quad (3a)$$

$$G_1^0 = \frac{1}{2(e^{\nu+\lambda} + a^2)^2} (\dot{\gamma}(e^\lambda a^2 \lambda' - 2e^\lambda a a' - e^{\nu+2\lambda}\nu') + \gamma'(e^{\nu+\lambda} a \lambda' - e^\lambda a^2 \dot{\lambda} + 2a^2 a' - e^{\nu+2\lambda} \dot{\lambda} + e^{\nu+\lambda} a \nu')) - \frac{a\gamma''}{e^{\nu+\lambda} + a^2} - \frac{a\gamma'^2}{2(e^{\nu+\lambda} + a^2)} + \frac{e^\lambda \dot{\gamma}'}{e^{\nu+\lambda} + a^2} + \frac{e^\lambda \dot{\gamma}\gamma'}{2(e^{\nu+\lambda} + a^2)} = 0, \quad (3b)$$

\*E-mail: Karbanovskiy\_V\_V@mail.ru

\*\*E-mail: Markov\_Victor@mail.ru

$$G_1^1 = \frac{1}{4(e^{\nu+\lambda} + a^2)^2} (-4e^{\nu+2\lambda}\ddot{\gamma} - 3e^{\nu+2\lambda}\dot{\gamma}^2 + 2e^{\nu+2\lambda}\dot{\gamma}\dot{\nu} + 2e^{2\nu+\lambda}\dot{\gamma}'\nu' + e^{2\nu+\lambda}\dot{\gamma}'^2 + 4e^{\nu+\lambda}a\dot{\gamma}\gamma' + 4e^{\nu+\lambda}a\dot{\gamma}' + 4e^{\nu+\lambda}a\dot{\gamma}' - 2e^{\nu+\lambda}a\nu'\gamma' - 2e^{\nu+\lambda}a\dot{\lambda}\gamma' + 4e^\lambda a\dot{\gamma}\dot{a} - 2e^\lambda a^2\dot{\gamma}\dot{\lambda} - 4e^\lambda a^2\ddot{\gamma} - 3e^\lambda a^2\dot{\gamma}^2 + e^\nu a^2\dot{\gamma}'^2 + 2e^\nu a^2\nu'\gamma' + 4a^3(\dot{\gamma}\gamma' + \dot{\gamma}')) - e^{-\gamma} = 0. \quad (3c)$$

В рассматриваемом случае отличны от нуля компоненты тензора Эйнштейна  $G_2^2 = G_3^3$  и  $G_0^1$ . Однако компоненты  $G_2^2$  и  $G_3^3$  выражаются через  $G_0^0$ ,  $G_1^1$  и  $G_1^1$  вследствие тождества  $G_{k;i}^i = 0$ , а  $G_0^1$  — вследствие соотношения  $G_0^1 = g^{1i}g_{0k}G_i^k$ .

Подстановкой

$$x = e^{-\gamma/2}, \quad y = e^{-\nu}, \quad z = (e^\lambda + a^2 e^{-\nu})^{-1} \quad (4)$$

сводим формулы (3) к системе

$$G_0^0 = z \left( \frac{2x''}{x} + \frac{x'^2}{x^2} \right) + \frac{z'x'}{x} + y \left( \frac{\dot{x}\dot{z}}{xz} - \frac{\dot{x}^2}{x^2} \right) + zy \left( \frac{2a\dot{x}}{x} + \frac{2a\dot{x}'}{x} + \frac{2a\dot{x}x'}{x^2} \right) + \frac{azy'\dot{x}}{x} + \frac{az'y\dot{x}}{x} + \frac{2a\dot{a}zy^2\dot{x}}{x} + \frac{a^2zyy\dot{x}}{x} + a^2zy^2\dot{x}^2 - \frac{1}{x^2} = 0, \quad (5a)$$

$$G_1^1 = y \left( \frac{\dot{z}x'}{zx} + \frac{y'\dot{x}}{yx} + \frac{2\dot{x}'}{x} - a \left( \frac{zy'x'}{yx} + \frac{z'x'}{x} + \frac{2zx''}{x} \right) + a^2 \left( \frac{zy\dot{x}'}{x} - \frac{2zy\dot{x}'}{x} - \frac{z'y\dot{x}}{x} - \frac{2zy'\dot{x}}{x} \right) + 2azy \left( \frac{\dot{a}x'}{x} - \frac{a'\dot{x}}{x} \right) \right) = 0, \quad (5b)$$

$$G_1^1 = -\frac{\dot{x}\dot{y}}{x} - y \left( \frac{2\ddot{x}}{x} + \frac{\dot{x}^2}{x^2} \right) + \frac{zx'}{x} \left( \frac{x'}{x} - \frac{y'}{y} \right) + \frac{azx'\dot{y}}{x} + \frac{ayx'\dot{z}}{x} + 2azy \left( \frac{x'\dot{x}}{x^2} + \frac{\dot{x}'}{x} \right) + \frac{2\dot{a}zyx'}{x} + \frac{2a^2zy\dot{x}\dot{y}}{x} + \frac{a^2y^2\dot{x}\dot{z}}{x} + 2azy^2 \left( \frac{\dot{a}\dot{x}}{x} + \frac{a\ddot{x}}{x} + \frac{a\dot{x}^2}{2x^2} \right) - \frac{1}{x^2} = 0. \quad (5c)$$

Выражая  $\dot{z}/z$  из (5b) и подставляя в (5a), получим уравнение

$$(\alpha x)' + \beta' = x', \quad (6)$$

где

$$\alpha = zx'^2 - \dot{x}^2 y + \dot{x}^2 y^2 a^2 z, \quad (7a)$$

$$\beta = 2azyx\dot{x}'. \quad (7b)$$

Его решение имеет вид

$$z = \frac{y\dot{x}^2 + 1 + f/x}{(x' + a\dot{x}y)^2}, \quad (8)$$

где  $f$  — произвольная функция от  $t$ . Подставляя теперь выражение (8) в (5b) и (5c), получим

$$G_1^0 = \{ xy^2 a^2 f(t) \dot{x}x' + y^2 a^2 f(t)^2 \dot{x}x' + x^2 y^3 a^2 \dot{f}(t) \dot{x}^2 x' - 2x^3 y^3 a^2 \dot{x}\dot{x}' - 2x^2 y^3 a^2 f(t) \dot{x}\ddot{x}' + x^3 y a^2 \dot{y}x' + 2x^2 y a^2 f(t) \dot{y}x' + x y a^2 f^2(t) \dot{y}x' + 2x^3 y^2 a \dot{a}x' + 4x^2 y^2 a f(t) \dot{a}x' + 2x y^2 a f^2(t) \dot{a}x' + 2x^3 y^3 a f(t) \dot{x}^2 \dot{a}x' + x y a f(t) x'^2 + y a f^2(t) x'^2 + 2x^2 y^2 a \dot{f}(t) \dot{x}x'^2 - x y^2 a f(t) \dot{x}^2 x'^2 - 2x^3 y^2 a \ddot{x}x'^2 - 2x^2 y^2 a f(t) \ddot{x}x'^2 + 2x^3 y^3 a \dot{x}^2 \ddot{x}x'^2 - 2x^3 y a \dot{x}\dot{y}x'^2 - 2x^2 y a f(t) \dot{x}\dot{y}x'^2 - 2x^3 y^2 \dot{x}\dot{a}x'^2 - 2x^2 y^2 f(t) \dot{x}\dot{a}x'^2 - 2x^3 y^3 \dot{x}^3 \dot{a}x'^2 + x^2 y \dot{f}(t) x'^3 - x y f(t) \dot{x}x'^3 + 2x^3 y^2 \dot{x}\ddot{x}x'^3 + x^3 y \dot{x}^2 \dot{y}x'^3 - x^3 a x' y' - 2x^2 a f(t) x' y' - x a f^2(t) x' y' - x^3 y a \dot{x}^2 x' y' - x^2 y a f(t) \dot{x}^2 x' y' + x^3 \dot{x}x'^2 y' + x^2 f(t) \dot{x}x'^2 y' + x^3 y \dot{x}^3 x'^2 y' \} \times \{ x^3 (f(t) + x(1 + y\dot{x}^2)) (y a \dot{x} + x')^2 \}^{-1} = 0, \quad (9a)$$

$$G_1^1 = \{ x y^3 a^2 \dot{f}(t) \dot{x} + x y^2 a \dot{f}(t) \dot{x}x' - 2x^2 y^3 a \dot{x}\ddot{x}' + x^2 y a \dot{y}x' + x y a f(t) \dot{y}x' + 2x^2 y^2 \dot{a}x' + 2x y^2 f(t) \dot{a}x' + 2x^2 y^3 \dot{x}^2 \dot{a}x' + y f(t) x'^2 - 2x^2 y^2 \ddot{x}x'^2 - x^2 y \dot{x}\dot{y}x'^2 - x^2 x' y' - x f(t) x' y' - x^2 y \dot{x}^2 x' y' \} \times \{ x^3 y (y a \dot{x} + x')^2 \}^{-1} = 0. \quad (9b)$$

Будем рассматривать случай  $f(t) = C$ , где  $C$  — произвольная константа. Тогда уравнения (9a) и (9b) примут следующий вид:

$$G_1^0 = ((C + x)a - x\dot{x}')x' \{ 2x^2 y^3 \dot{x}(\dot{x}\dot{a} - a\ddot{x}) + y^2 (C a \dot{x} + 2x((C + x)\dot{a} - x\ddot{x}')) - x(C + x)y' + y(Cx' + x\dot{y}((C + x)a - x\dot{x}') - x^2 \dot{x}^2 y') \} \times \{ x^3 (C + x(1 + y\dot{x}^2)) (y a \dot{x} + x')^2 \}^{-1} = 0, \quad (10a)$$

$$G_1^1 = x' \{ 2x^2 y^3 \dot{x}(\dot{x}\dot{a} - a\ddot{x}) + y^2 (C a \dot{x} + 2x((C + x)\dot{a} - x\ddot{x}')) - x(C + x)y' + y(Cx' + x\dot{y}((C + x)a - x\dot{x}') - x^2 \dot{x}^2 y') \} \times \{ x^3 y (y a \dot{x} + x')^2 \}^{-1} = 0. \quad (10b)$$

Легко убедиться, что, если справедливо равенство (10b), то и (10a) также выполняется. Введем обозначения

$$F = y\dot{x}^2 + 1 + C/x, \quad (11a)$$

$$\xi = x' + a\dot{xy}. \quad (11b)$$

Тогда уравнение (8) переписывается в виде

$$z = F/\xi^2. \quad (12)$$

Применяя выражения (11) в записи формулы (10a), получим

$$\begin{aligned} & x'(Fxx' - (C+x)\xi) \left\{ -CF\xi\dot{x} + Cx(\xi\dot{F} - 2F\dot{\xi}) + \right. \\ & \left. + x^2(\xi\dot{F}(1-2F) + F(x'\dot{F} - F'\dot{x} + 2(F-1)\dot{\xi})) \right\} \times \\ & \times \{Fx^3(-C + (1+F)x)\xi^2\dot{x}^2\}^{-1} = 0. \quad (13) \end{aligned}$$

Очевидно, частное решение уравнения (13) записывается как

$$\xi = \frac{Fx'}{1+C/x}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (12) и используя выражения (11), находим соответствующий класс решений

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{1}{y}dt^2 + \frac{2\dot{x}x'}{1+C/x}dt dr + \\ & + \frac{x'^2}{1+C/x}dr^2 + x^2d\Omega^2. \quad (15) \end{aligned}$$

Стандартными преобразованиями (см., например, [7], решение задачи 16.3)

$$d\tau = dt + \frac{g_{01}}{|g_{00}|}dx \quad (16)$$

и выбором  $x$  в качестве новой радиальной координаты можем свести метрику (15) к статической форме:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C}{x}\right) d\tau^2 + \frac{dx^2}{1+C/x} + x^2d\Omega^2. \quad (17)$$

Другой класс решений соответствует уравнению

$$\begin{aligned} \dot{\xi} - \xi \left( \frac{\dot{F}}{2F} + \frac{\dot{F} + C\dot{x}/x^2}{2(F-1-C/x)} \right) + \\ + \frac{x'\dot{F} - \dot{x}F'}{2(F-1-C/x)} = 0. \quad (18) \end{aligned}$$

Интегрируя (18), находим

$$\xi = L(t, \tau)(F(F-1-C/x))^{1/2}, \quad (19)$$

где функция  $L(t, \tau)$  определяется условием

$$\dot{L} = -\frac{x'\dot{F} - \dot{x}F'}{2F^{1/2}(F-1-C/x)^{3/2}}. \quad (20)$$

Из выражений (11), (19) и (20) получим соответствующий класс решений

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{1}{y}dt^2 + \\ & + 2\left(\frac{L(y\dot{x}^2 + 1 + C/x)^{1/2}}{y^{1/2}} - \frac{x'}{\dot{xy}}\right) dt dr + \\ & + \left(-L^2\left(1 + \frac{C}{x}\right) + \frac{2x'L(y\dot{x}^2 + 1 + C/x)^{1/2}}{\dot{xy}^{1/2}} + \right. \\ & \left. + \frac{x'^2}{y\dot{x}^2}\right) dr^2 + x^2d\Omega^2. \quad (21) \end{aligned}$$

Следовательно, метрики вида (21) содержат в качестве независимых функции  $g_{00}$  и  $g_{22}$ . Представляется актуальным исследование возможности существования статического случая в данном классе решений.

Преобразованиями (16) приведем (21) к виду

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C}{x}\right) \frac{L\dot{x}^2}{x'^2}d\tau^2 + \frac{dx^2}{1+C/x} + x^2d\Omega^2. \quad (22)$$

Очевидно, что метрика (22) в общем случае не может быть сведена к статической. Для такого преобразования функция

$$\psi = \frac{L\dot{x}^2}{x'^2} \quad (23)$$

должна была бы зависеть только от  $\tau$ , т.е. удовлетворять требованию

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \quad (24)$$

Покажем, что условие (24) в общем случае не выполняется.

Полный дифференциал функции  $\psi(\tau, x)$  равен

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial\tau}d\tau. \quad (25)$$

Используя преобразование (16) и учитывая, что

$$dx = \dot{x}dt + x'dr, \quad (26)$$

перейдем в (25) от переменных  $x$  и  $\tau$  к  $r$  и  $t$ :

$$d\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right) dt + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}x' + \frac{\partial\psi}{\partial\tau}yg_{01}\right) dr, \quad (27)$$

где согласно (21)

$$g_{01} = \frac{L(y\dot{x}^2 + 1 + C/x)^{1/2}}{y^{1/2}} - \frac{x'}{\dot{x}y}. \quad (28)$$

С другой стороны, используя (23), можно записать

$$d\psi = d\frac{L\dot{x}^2}{x'^2} = \frac{\dot{x}^2}{x'^2} \left( \left( L' + 2L \left( \frac{\dot{x}'}{\dot{x}} - \frac{x''}{x'} \right) \right) dr + \left( \dot{L} + 2L \left( \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} - \frac{\dot{x}'}{x'} \right) \right) dt \right). \quad (29)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых дифференциалах в (27) и (29), получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\psi}{\partial\tau} &= \frac{\dot{x}^2}{x'^2} \left( \dot{L} + 2L \left( \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} - \frac{\dot{x}'}{x'} \right) \right), \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}x' + \frac{\partial\psi}{\partial\tau}yg_{01} &= \frac{\dot{x}^2}{x'^2} \left( L' + 2L \left( \frac{\dot{x}'}{\dot{x}} - \frac{x''}{x'} \right) \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Решая ее алгебраически относительно  $\partial\psi/\partial x$  и учитывая (20) и (28), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= \left\{ x'^3(2y\ddot{x} + \dot{y}\dot{x}) + \right. \\ &+ 2\sqrt{y^3\dot{x}^2} \sqrt{y\dot{x}^2 + 1 + \frac{C}{x}} x'(\dot{x}L' + 4L\dot{x}')\dot{x}\dot{x}'^2 \times \\ &\times \left( 4L\sqrt{y^3} \sqrt{y\dot{x}^2 + 1 + \frac{C}{x}} \ddot{x} + \dot{x}y' + 2y\dot{x}' \right) + \\ &+ 4L\sqrt{y^3}\dot{x}^3 \sqrt{y\dot{x}^2 + 1 + \frac{C}{x}} x'' \left. \right\} \times \\ &\times \left\{ 2\sqrt{y^3} \sqrt{y\dot{x}^2 + 1 + \frac{C}{x}} \times \right. \\ &\times \left. \left( L\sqrt{y\dot{x}} \sqrt{y\dot{x}^2 + 1 + \frac{C}{x}} - 2x' \right) x'^3 \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Очевидно, что при произвольных функциях  $x(t, r)$  и  $y(t, r)$  выражение (31) не соответствует (24). Следовательно, метрика (22) не может быть сведена к статической.

Представляет интерес исследование возможности применения решения (21) для описания внешнего поля черных дыр, вакуумных кротовых нор, поиска гравитационных волн и т.д. При этом все известные метрики, удовлетворяющие сферически-симметричным уравнениям ОТО «в пустоте» содержатся в одном из найденных нами классов.

Также следует отметить, что доказательство теоремы Биркгофа основывается на предположении, что  $\partial g_{22}/\partial t = 0$  и  $a = 0$ , приводящем систему (3) к статической. Таким образом, имеет место переход к совершенно иной проблеме. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (32)$$

Как известно, его общее решение имеет вид

$$u(x, t) = u_1(x - at) + u_2(x + at), \quad (33)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — произвольные функции. Преобразовывая выражение (33) к статическому, получим

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x). \quad (34)$$

Но если считать, что  $u = u(x)$  непосредственно в уравнении (32), то приходим к решению

$$u(x) = C_1 x + C_2, \quad (35)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы интегрирования. Следовательно, при таком предположении мы не получаем общего класса решений. Аналогичная ситуация имеет место в нашем случае.

В настоящее время актуальным является исследование системы (9) с различными видами функций  $f(t)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. Painlevé, Comptes rendus, Academie des sciences **173**, 873 (1921).
2. A. S. Eddington, Nature **133**, 192 (1924).
3. D. Finkelstein, Phys. Rev. **110**, 965 (1958).
4. M. S. Morris, K. S. Thorne, and U. Yurtsever, Phys. Rev. Lett. **61**, 1446 (1988).
5. L. V. Verozub, Phys. Lett. A **156**, 404 (1991).
6. S. I. Chermianin, Astrophys. Sp. Sci. **197**, 233 (1992).
7. А. Лайтман и др., *Сборник задач по теории относительности и гравитации*, Мир, Москва (1979).