РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА *ТОМ 142, ВЫПУСК 2 (8)*
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД *АВГУСТ 2012*
МОСКВА «НАУКА»

ЖУРНАЛ ИЗДАЕТСЯ ПОД РУКОВОДСТВОМ ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК Р.

СОДЕРЖАНИЕ

АТОМЫ, МОЛЕКУЛЫ, ОПТИКА

ЯДРА, ЧАСТИЦЫ, ПОЛЯ, ГРАВИТАЦИЯ И АСТРОФИЗИКА

ТВЕРДЫЕ ТЕЛА И ЖИДКОСТИ

ПОРЯДОК, БЕСПОРЯДОК И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ

ЭЛЕКТРОННЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ, НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЗИКА, ФИЗИКА «МЯГКОЙ МАТЕРИИ»

ЖЭТФ, 2012, том 142, вып. 2 (8), стр. 238–241

ОБЩИЙ КЛАСС ВАКУУМНЫХ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В. В. Карбановский[*], *О. М. Сорокин*, *М. И. Нестерова*, *В. А. Болотняя*, *В. Н. Марков*[**], *Т. В. Каиров*, *А. А. Ляш*, *О. Р. Тарасюк*

Мурманский государственный педагогический университет
183720, Мурманск, Россия

Поступила в редакцию 7 сентября 2010 г.
после переработки 15 февраля 2012 г.

Рассмотрена система сферически-симметричных вакуумных уравнений общей теории относительности. Получено общее решение, представленное двумя классами метрик с произвольными функциями g_{00} и g_{22}. Проанализированы свойства найденных решений.

Известно (см. [1]), что общий класс статических сферически-симметричных решений вакуумных уравнений общей теории относительности (ОТО) определяется выражением (скорость света $c = 1$)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{x}\right) dt^2 + 2a\,dt\,dr + (x'^2 - a^2)\left(1 - \frac{r_g}{x}\right)^{-1} dr^2 + x^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

где r_g — гравитационный радиус объекта, штрих означает дифференцирование по r, а функции $x(r)$ и $a(r)$ являются произвольными.

При $a = 0$ и $x = r$ метрика (1) сводится к решению Шварцшильда. При выборе условий $a = 1$, $x = r$ выражение (1) соответствует метрике Эддингтона – Финкельштейна [2, 3]. Очевидно, однако, что для полного «покрытия» пространства-времени метрикой (1) должно быть выполнено требование $x(0) = 0$ (за исключением случая пространства-времени, содержащего «дефекты», например, вакуумные червоточины Морриса – Торна [4]). В результате неизбежно присутствие ненулевой точки $\tilde{r}$, для которой $x(\tilde{r}) = r_g$. Таким образом, существует проблема горизонта событий. Ее известные «решения» [5, 6] фактически сводятся к переносу «истинного начала» координат $r = 0$ в точку $r = r_g$. Следовательно, они не могут в полной мере описать пространство-время. Поэтому интересно рассмотреть вакуумные уравнения ОТО для общей нестатической сферически-симметричной метрики:

$$ds^2 = -e^{\nu} dt^2 + 2a\,dt\,dr + e^{\lambda} dr^2 + e^{\gamma} d\Omega^2, \quad (2)$$

где a, γ, λ, ν — функции от t и r.

Система вакуумных уравнений ОТО для метрики (2) имеет вид (точка обозначает дифференцирование по t)

$$G_0^0 = \frac{1}{4(e^{\nu+\lambda} + a^2)^2}\big(-e^{\nu+2\lambda}\dot{\gamma}^2 - 2e^{\nu+2\lambda}\dot{\gamma}\dot{\lambda} + 3e^{2\nu+\lambda}\gamma'^2 + 4e^{2\nu+\lambda}\gamma'' - 2e^{2\nu+\lambda}\gamma'\lambda' + 4e^{\nu+\lambda}\gamma'\dot{\gamma}a + 4e^{\nu+\lambda}a\dot{\gamma}' + 4e^{\nu+\lambda}a'\dot{\gamma} - 2e^{\nu+\lambda}a\dot{\gamma}\nu' - 2e^{\nu+\lambda}a\dot{\gamma}\lambda' - 2e^{\lambda}a^2\dot{\lambda}\dot{\gamma} - e^{\lambda}a^2\dot{\gamma}^2 + 3e^{\nu}a^2\gamma'^2 + 2e^{\nu}a^2\gamma'\nu' + 4e^{\nu}a^2\gamma'' - 4e^{\nu}aa'\gamma' + 4a^3(\dot{\gamma}\gamma' + \dot{\gamma}')\big) - e^{-\gamma} = 0, \quad (3a)$$

$$G_1^0 = \frac{1}{2(e^{\nu+\lambda}+a^2)^2}\big(\dot{\gamma}(e^{\lambda}a^2\lambda' - 2e^{\lambda}aa' - e^{\nu+2\lambda}\nu') + \gamma'(e^{\nu+\lambda}a\lambda' - e^{\lambda}a^2\dot{\lambda} + 2a^2a' - e^{\nu+2\lambda}\dot{\lambda} + e^{\nu+\lambda}a\nu')\big) - \frac{a\gamma''}{e^{\nu+\lambda} + a^2} - \frac{a\gamma'^2}{2(e^{\nu+\lambda} + a^2)} + \frac{e^{\lambda}\dot{\gamma}'}{e^{\nu+\lambda} + a^2} + \frac{e^{\lambda}\dot{\gamma}\gamma'}{2(e^{\nu+\lambda} + a^2)} = 0, \quad (3b)$$

[*] E-mail: Karbanovski_V_V@mail.ru
[**] E-mail: Markov_Victor@mail.ru

$$G_1^1 = \frac{1}{4(e^{\nu+\lambda}+a^2)^2}\left(-4e^{\nu+2\lambda}\ddot\gamma - 3e^{\nu+2\lambda}\dot\gamma^2 + 2e^{\nu+2\lambda}\dot\gamma\dot\nu + 2e^{2\nu+\lambda}\gamma'\nu' + e^{2\nu+\lambda}\gamma'^2 + 4e^{\nu+\lambda}a\dot\gamma\gamma' + 4e^{\nu+\lambda}\dot a\gamma' + 4e^{\nu+\lambda}a\dot\gamma' - 2e^{\nu+\lambda}a\dot\nu\gamma' - 2e^{\nu+\lambda}a\dot\lambda\gamma' + 4e^{\lambda}a\dot\gamma\dot a - 2e^{\lambda}a^2\dot\gamma\dot\lambda - 4e^{\lambda}a^2\ddot\gamma - 3e^{\lambda}a^2\dot\gamma^2 + e^{\nu}a^2\gamma'^2 + 2e^{\nu}a^2\nu'\gamma' + 4a^3(\dot\gamma\gamma' + \dot\gamma')\right) - e^{-\gamma} = 0. \quad (3c)$$

В рассматриваемом случае отличны от нуля компоненты тензора Эйнштейна $G_2^2 = G_3^3$ и G_0^1. Однако компоненты G_2^2 и G_3^3 выражаются через G_0^0, G_1^0 и G_1^1 вследствие тождества $G^i_{k;i} = 0$, а G_0^1 — вследствие соотношения $G_0^1 = g^{1i}g_{0k}G_i^k$.

Подстановкой

$$x = e^{-\gamma/2}, \quad y = e^{-\nu}, \quad z = (e^{\lambda} + a^2e^{-\nu})^{-1} \qquad (4)$$

сводим формулы (3) к системе

$$G_0^0 = z\left(\frac{2x''}{x} + \frac{x'^2}{x^2}\right) + \frac{z'x'}{x} + y\left(\frac{\dot x\dot z}{xz} - \frac{\dot x^2}{x^2}\right) + zy\left(\frac{2a'\dot x}{x} + \frac{2a\dot x'}{x} + \frac{2a\dot x x'}{x^2}\right) + \frac{azy'\dot x}{x} + \frac{az'y\dot x}{x} + \frac{2a\dot a zy^2\dot x}{x} + \frac{a^2zy\dot y\dot x}{x} + a^2zy^2\dot x^2 - \frac{1}{x^2} = 0, \quad (5a)$$

$$G_1^0 = y\left(\frac{\dot z x'}{zx} + \frac{y'\dot x}{yx} + \frac{2\dot x'}{x} - a\left(\frac{zy'x'}{yx} + \frac{z'x'}{x} + \frac{2zx''}{x}\right) + a^2\left(\frac{z\dot y x'}{x} - \frac{2zy\dot x'}{x} - \frac{z'y\dot x}{x} - \frac{2zy'\dot x}{x}\right) + 2azy\left(\frac{\dot a x'}{x} - \frac{a'\dot x}{x}\right)\right) = 0, \quad (5b)$$

$$G_1^1 = -\frac{\dot x\dot y}{x} - y\left(\frac{2\ddot x}{x} + \frac{\dot x^2}{x^2}\right) + \frac{zx'}{x}\left(\frac{x'}{x} - \frac{y'}{y}\right) + \frac{azx'\dot y}{x} + \frac{ayx'\dot z}{x} + 2azy\left(\frac{x'\dot x}{x^2} + \frac{\dot x'}{x}\right) + \frac{2\dot a zyx'}{x} + \frac{2a^2zy\dot x\dot y}{x} + \frac{a^2y^2\dot x\dot z}{x} + 2azy^2\left(\frac{\dot a\dot x}{x} + \frac{a\ddot x}{x} + \frac{a\dot x^2}{2x^2}\right) - \frac{1}{x^2} = 0. \quad (5c)$$

Выражая $\dot z/z$ из (5b) и подставляя в (5a), получим уравнение

$$(\alpha x)' + \beta' = x', \qquad (6)$$

где

$$\alpha = zx'^2 - \dot x^2 y + \dot x^2 y^2 a^2 z, \qquad (7a)$$

$$\beta = 2azyxx'\dot x. \qquad (7b)$$

Его решение имеет вид

$$z = \frac{y\dot x^2 + 1 + f/x}{(x' + a\dot x y)^2}, \qquad (8)$$

где f — произвольная функция от t. Подставляя теперь выражение (8) в (5b) и (5c), получим

$$G_1^0 = \{xy^2a^2f(t)\dot x x' + y^2a^2f(t)^2\dot x x' + x^2y^3a^2\dot f(t)\dot x^2 x' - 2x^3y^3a^2\dot x\ddot x x' - 2x^2y^3a^2f(t)\dot x\ddot x x' + x^3ya^2\dot y x' + 2x^2ya^2f(t)\dot y x' + xya^2f^2(t)\dot y x' + 2x^3y^2a\dot a x' + 4x^2y^2af(t)\dot a x' + 2xy^2af^2(t)\dot a x' + 2x^3y^3a\dot x^2\dot a x' + 2x^2y^3af(t)\dot x^2\dot a x' + xyaf(t)x'^2 + yaf^2(t)x'^2 + 2x^2y^2a\dot f(t)\dot x x'^2 - xy^2af(t)\dot x^2x'^2 - 2x^3y^2a\ddot x x'^2 - 2x^2y^2af(t)\ddot x x'^2 + 2x^3y^3a\dot x^2\ddot x x'^2 - 2x^3ya\dot x\dot y x'^2 - 2x^2yaf(t)\dot x\dot y x'^2 - 2x^3y^2\dot x\dot a x'^2 - 2x^2y^2f(t)\dot x\dot a x'^2 - 2x^3y^3\dot x^3\dot a x'^2 + x^2y\dot f(t)x'^3 - xyf(t)\dot x x'^3 + 2x^3y^2\dot x\ddot x x'^3 + x^3y\dot x^2\dot y x'^3 - x^3ax'y' - 2x^2af(t)x'y' - xaf^2(t)x'y' - x^3ya\dot x^2x'y' - x^2yaf(t)\dot x^2x'y' + x^3\dot x x'^2y' + x^2f(t)\dot x x'^2y' + x^3y\dot x^3x'^2y'\} \times \{x^3(f(t) + x(1 + y\dot x^2))(ya\dot x + x')^2\}^{-1} = 0, \quad (9a)$$

$$G_1^1 = \Big\{xy^3a^2\dot f(t)\dot x + xy^2a\dot f(t)\dot x x' - 2x^2y^3a\dot x\ddot x x' + x^2ya\dot y x' + xyaf(t)\dot y x' + 2x^2y^2\dot a x' + 2xy^2f(t)\dot a x' + 2x^2y^3\dot x^2\dot a x' + yf(t)x'^2 - 2x^2y^2\ddot x x'^2 - x^2y\dot x\dot y x'^2 - x^2x'y' - xf(t)x'y' - x^2y\dot x^2x'y'\Big\} \times \{x^3y(ya\dot x + x')^2\}^{-1} = 0. \quad (9b)$$

Будем рассматривать случай $f(t) = C$, где C — произвольная константа. Тогда уравнения (9a) и (9b) примут следующий вид:

$$G_1^0 = ((C + x)a - x\dot x x')x'\{2x^2y^3\dot x(\dot x\dot a - a\ddot x) + y^2(Ca\dot x + 2x((C + x)\dot a - x\ddot x x')) - x(C + x)y' + y(Cx' + x\dot y((C + x)a - x\dot x x') - x^2\dot x^2y')\} \times \{x^3(C + x(1 + y\dot x^2))(ya\dot x + x')^2\}^{-1} = 0, \quad (10a)$$

$$G_1^1 = x'\{2x^2y^3\dot x(\dot x\dot a - a\ddot x) + y^2(Ca\dot x + 2x((C + x)\dot a - x\ddot x x')) - x(C + x)y' + y(Cx' + x\dot y((C + x)a - x\dot x x') - x^2\dot x^2y')\} \times \{x^3y(ya\dot x + x')^2\}^{-1} = 0. \quad (10b)$$

Легко убедиться, что, если справедливо равенство (10b), то и (10a) также выполняется. Введем обозначения

$$F = y\dot{x}^2 + 1 + C/x, \tag{11a}$$

$$\xi = x' + a\dot{x}y. \tag{11b}$$

Тогда уравнение (8) перепишется в виде

$$z = F/\xi^2. \tag{12}$$

Применяя выражения (11) в записи формулы (10a), получим

$$x'(Fxx' - (C+x)\xi)\left\{-CF\xi\dot{x} + Cx(\xi\dot{F} - 2F\dot{\xi}) + \right.$$
$$\left. + x^2(\xi\dot{F}(1-2F) + F(x'\dot{F} - F'\dot{x} + 2(F-1)\dot{\xi}))\right\} \times$$
$$\times \left\{Fx^3(-C + (1+F)x)\xi^2\dot{x}^2\right\}^{-1} = 0. \tag{13}$$

Очевидно, частное решение уравнения (13) записывается как

$$\xi = \frac{Fx'}{1 + C/x}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (12) и используя выражения (11), находим соответствующий класс решений

$$ds^2 = -\frac{1}{y}dt^2 + \frac{2\dot{x}x'}{1+C/x}dt\,dr +$$
$$+ \frac{x'^2}{1+C/x}dr^2 + x^2 d\Omega^2. \tag{15}$$

Стандартными преобразованиями (см., например, [7], решение задачи 16.3)

$$d\tau = dt + \frac{g_{01}}{|g_{00}|}dx \tag{16}$$

и выбором x в качестве новой радиальной координаты можем свести метрику (15) к статической форме:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C}{x}\right)d\tau^2 + \frac{dx^2}{1 + C/x} + x^2 d\Omega^2. \tag{17}$$

Другой класс решений соответствует уравнению

$$\dot{\xi} - \xi\left(\frac{\dot{F}}{2F} + \frac{\dot{F} + C\dot{x}/x^2}{2(F - 1 - C/x)}\right) +$$
$$+ \frac{x'\dot{F} - \dot{x}F'}{2(F - 1 - C/x)} = 0. \tag{18}$$

Интегрируя (18), находим

$$\xi = L(t,r)(F(F - 1 - C/x))^{1/2}, \tag{19}$$

где функция $L(t,r)$ определяется условием

$$\dot{L} = -\frac{x'\dot{F} - \dot{x}F'}{2F^{1/2}(F - 1 - C/x)^{3/2}}. \tag{20}$$

Из выражений (11), (19) и (20) получим соответствующий класс решений

$$ds^2 = -\frac{1}{y}dt^2 +$$
$$+ 2\left(\frac{L(y\dot{x}^2 + 1 + C/x)^{1/2}}{y^{1/2}} - \frac{x'}{\dot{x}y}\right)dt\,dr +$$
$$+ \left(-L^2\left(1 + \frac{C}{x}\right) + \frac{2x'L(y\dot{x}^2 + 1 + C/x)^{1/2}}{\dot{x}y^{1/2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{x'^2}{y\dot{x}^2}\right)dr^2 + x^2 d\Omega^2. \tag{21}$$

Следовательно, метрики вида (21) содержат в качестве независимых функции g_{00} и g_{22}. Представляется актуальным исследование возможности существования статического случая в данном классе решений.

Преобразованиями (16) приведем (21) к виду

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C}{x}\right)\frac{L\dot{x}^2}{x'^2}d\tau^2 + \frac{dx^2}{1 + C/x} + x^2 d\Omega^2. \tag{22}$$

Очевидно, что метрика (22) в общем случае не может быть сведена к статической. Для такого преобразования функция

$$\psi = \frac{L\dot{x}^2}{x'^2} \tag{23}$$

должна была бы зависеть только от τ, т. е. удовлетворять требованию

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \tag{24}$$

Покажем, что условие (24) в общем случае не выполняется.

Полный дифференциал функции $\psi(\tau, x)$ равен

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial\tau}d\tau. \tag{25}$$

Используя преобразование (16) и учитывая, что

$$dx = \dot{x}dt + x'dr, \tag{26}$$

перейдем в (25) от переменных x и τ к r и t:

$$d\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)dt + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}x' + \frac{\partial\psi}{\partial\tau}yg_{01}\right)dr, \tag{27}$$

где согласно (21)

$$g_{01} = \frac{L(y\dot{x}^2 + 1 + C/x)^{1/2}}{y^{1/2}} - \frac{x'}{\dot{x}y}. \tag{28}$$

С другой стороны, используя (23), можно записать

$$d\psi = d\frac{L\dot{x}^2}{x'^2} = \frac{\dot{x}^2}{x'^2}\left(\left(L' + 2L\left(\frac{\dot{x}'}{\dot{x}} - \frac{x''}{x'}\right)\right) dr + \right.$$
$$\left. + \left(\dot{L} + 2L\left(\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} - \frac{\dot{x}'}{x'}\right)\right) dt\right). \tag{29}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах в (27) и (29), получим систему

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\dot{x}^2}{x'^2}\left(\dot{L} + 2L\left(\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} - \frac{\dot{x}'}{x'}\right)\right), \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x}x' + \frac{\partial\psi}{\partial\tau}yg_{01} = \frac{\dot{x}^2}{x'^2}\left(L' + 2L\left(\frac{\dot{x}'}{\dot{x}} - \frac{x''}{x'}\right)\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Решая ее алгебраически относительно $\partial\psi/\partial x$ и учитывая (20) и (28), находим

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \left\{ x'^3(2y\ddot{x} + \dot{y}\dot{x}) + \right.$$
$$+ 2\sqrt{y^3}\dot{x}^2\sqrt{y\dot{x}^2 + 1 + \frac{C}{x}}x'(\dot{x}L' + 4L\dot{x}')\dot{x}x'^2 \times$$
$$\times \left(4L\sqrt{y^3}\sqrt{y\dot{x}^2 + 1 + \frac{C}{x}}\ddot{x} + \dot{x}y' + 2y\dot{x}'\right) +$$
$$\left. + 4L\sqrt{y^3}\dot{x}^3\sqrt{y\dot{x}^2 + 1 + \frac{C}{x}}x''\right\} \times$$
$$\times \left\{ 2\sqrt{y^3}\sqrt{y\dot{x}^2 + 1 + \frac{C}{x}} \times \right.$$
$$\left. \times \left(L\sqrt{y}\dot{x}\sqrt{y\dot{x}^2 + 1 + \frac{C}{x}} - 2x'\right) x'^3\right\}^{-1}. \tag{31}$$

Очевидно, что при произвольных функциях $x(t, r)$ и $y(t, r)$ выражение (31) не соответствует (24). Следовательно, метрика (22) не может быть сведена к статической.

Представляет интерес исследование возможности применения решения (21) для описания внешнего поля черных дыр, вакуумных кротовых нор, поиска гравитационных волн и т. д. При этом все известные метрики, удовлетворяющие сферически-симметричным уравнениям ОТО «в пустоте» содержатся в одном из найденных нами классов.

Также следует отметить, что доказательство теоремы Биркгофа основывается на предположении, что $\partial g_{22}/\partial t = 0$ и $a = 0$, приводящем систему (3) к статической. Таким образом, имеет место переход к совершенно иной проблеме. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{32}$$

Как известно, его общее решение имеет вид

$$u(x, t) = u_1(x - at) + u_2(x + at), \tag{33}$$

где u_1 и u_2 — произвольные функции. Преобразовывая выражение (33) к статическому, получим

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x). \tag{34}$$

Но если считать, что $u = u(x)$ непосредственно в уравнении (32), то приходим к решению

$$u(x) = C_1 x + C_2, \tag{35}$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования. Следовательно, при таком предположении мы не получаем общего класса решений. Аналогичная ситуация имеет место в нашем случае.

В настоящее время актуальным является исследование системы (9) с различными видами функции $f(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Painlevé, Comptes rendus, Academie des sciences **173**, 873 (1921).
2. A. S. Eddington, Nature **133**, 192 (1924).
3. D. Finkelstein, Phys. Rev. **110**, 965 (1958).
4. M. S. Morris, K. S. Thorne, and U. Yurtsever, Phys. Rev. Lett. **61**, 1446 (1988).
5. L. V. Verozub, Phys. Lett. A **156**, 404 (1991).
6. S. I. Chermianin, Astrophys. Sp. Sci. **197**, 233 (1992).
7. А. Лайтман и др., *Сборник задач по теории относительности и гравитации*, Мир, Москва (1979).